Løsningsforslag, eksamen MAT102 nett, våren 2013

OPPGAVE 1 (16 %)

Forenkle følgende uttrykk:

a) $3(c-b)-2(b-2a)-(a-2c)=3c-3b-2b+4a-a+2c=5c-5b+3a$

b) $\frac{3s+12t}{5t-5s}\cdot\frac{t^3-st^2}{ts+t^2}=\frac{3(s+4t)}{5(t-s)}\cdot\frac{t^2(t-s)}{t(s+t)}=\frac{3t(s+4t)}{5(s+t)}$

c) $\frac{25u^2}{9\,v^4}\cdot\frac{39\,(uv)^5}{15u^6}=\frac{25u^2}{9v^4}\cdot\frac{39u^5v^5}{15u^6}=\frac{5\cdot 13uv}{9}=\frac{65}{9}uv$

d) $3\left(a-\frac{b}{3}\right)\left(a+\frac{b}{3}\right)-\left(3a-\frac{b}{3}\right)^2=3\left(a^2-\frac{b^2}{9}\right)-\left(9a^2-2ab+\frac{b^2}{9}\right)$

$$=3a^2-\frac{b^2}{3}-9a^2+2ab-\frac{b^2}{9}=-6a^2-\frac{4}{9}b^2+2ab$$

OPPGAVE 2 (18 %)

a) Løs ligningen og sett prøve på svaret:

$$2\left(x-1\frac{1}{3}\right)=\frac{x-4}{2}+1$$
$$2\left(x-\frac{4}{3}\right)=\frac{x}{2}-2+1$$
$$2x-\frac{8}{3}=\frac{x}{2}-1$$
$$\frac{3}{2}x=\frac{5}{3}$$
$$x=\frac{10}{9}$$

Sett prøve på svaret:

Venstre side = $2\left(\frac{10}{9}-\frac{4}{3}\right)=2\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)=-\frac{4}{9}$

Høyre side $=\frac{\frac{10}{9}-4}{2}+1=\frac{-\frac{26}{9}}{2}+1=-\frac{13}{9}+1=-\frac{4}{9}$

Venstre side=Høyre side, derfor svaret vi fikk er riktig.

b) Løs andregradsligningene:

i)
$$-3x^2=-9x$$
$$-3x^2+9x=0$$
$$-3x(x-3)=0$$
$$-3x=0\ \textit{eller}\ \ x-3=0$$
$$x=0\ \textit{eller}\ x=3$$

ii)

$$5 = 2x + 3x^2$$
$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$
$$a = 3, b = 2, c = -5$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6}$$
$$L = \{-\frac{5}{3}, 1\}$$

c) Løs ligningssettet:

$-\frac{1}{2}x = 3 - y$ I

$x + \frac{1}{3}y = -\frac{4}{3}$ II

Løsning:

Vi første tar ligningen I $-\frac{1}{2}x = 3 - y$

I' $x = -6 + 2y$

Nå kan vi sette x inn i ligning II

$$-6 + 2y + \frac{1}{3}y = -\frac{4}{3}$$
$$\frac{7}{3}y = \frac{14}{3}$$
$$y = 2$$

Sett $y = 2$ inn i ligning I':

$$x = -6 + 2 \cdot 2 = -2$$

Derfor $(x, y) = (-2, 2)$.

d) Justin Bieber og Lady Gaga er rangert som de to mest fulgte i verden på Twitter. Justin Bieber er rangert på første plass med 1 200 000 flere fulgte enn Lady Gaga. (Daily Mail hevder at svært mange av Lady Gagas Twitter-følgere faktisk ikke er ekte, men det trenger vi ikke ta hensyn til her.)

Justin Bieber og Lady Gaga får også svært mange fan-brev. 0,54 % av Justin Biebers Twitter-følgere sender ham et fan-brev i løpet av året. Tilsvarende tall er ikke kjent for Lady Gaga, men vi kan anta at 0,54 % av hennes Twitter-følgere også sender henne et fan-brev i løpet av året. I så fall vil det på ett år bli sendt 392 040 fan-brev tilsammen til de to popstjernene. Hvor mange Twitter-følgere har da Justin Bieber, og hvor mange har Lady Gaga?

Sett opp et ligningssett og løs.

Løsning:

Anta at Justin Bieber har x Twitter-følgere, og Lady Gaga har y Twitter-følgere. Først vet vi at Justin Bieber har 1 200 000 flere enn Lady Gaga, derfor

$x - y = 1\,200\,000$

Også til sammen er det 392 040 fan-brev sent til de to popstjernene, derfor

$0{,}54\%x + 0{,}54\%y = 392\ 040$

Nå får vi et ligningssett

I $\quad x - y = 1\ 200\ 000$

II $\quad 0{,}54\%x + 0{,}54\%y = 392\ 040$

For å løse dette ligningssettet, kan vi bruke innsettingsmetoden.

Ta ligning I $x - y = 1\ 200\ 000$

$x = 1\ 200\ 000 + y$

Sett x inn i ligning II:

$0{,}54\%(1200\ 000 + y) + 0{,}54\%y = 392\ 040$

$6480 + 0{,}54\%y + 0{,}54\%y = 392\ 040$

$1{,}08\%\ y = 385\ 560$

$y = 35\ 700\ 000$

Sett y tilbake i I:

$x - 35\ 700\ 000 = 1\ 200\ 000$

$x = 36\ 900\ 000.$

Derfor $(x, y) = (36\ 900\ 000,\ 35\ 700\ 000)$.

Dvs Justin Bieber har 36 900 000 Twitter-følgere, og Lady Gaga har 35 700 000 Twitter-følgere.

OPPGAVE 3 (10 %)

I en undersøkelse (kilde: Booth (1981): «Child Methods in Secondary Mathematics») gjort blant britiske ungdomsskoleelever ble følgende tekstoppgave gitt:

> *Familien Green skal kjøre 261 miles fra London til Leeds. De tar en pause etter 87 miles. Hvordan vil du regne ut hvor mange miles de da har igjen å kjøre?*

Elevene ble vist åtte svaralternativer: $87 \cdot 3$, $261 + 87$, $87 : 261$, $261 - 87$, $261 \cdot 87$, $261 : 87$, $87 - 261$, og $87 + 174$.

13 år gamle Tony mente i et dybdeintervju at svaret måtte være $261 + 87$. Da intervjueren spurte om han var sikker, endret Tony svaret sitt til $87 : 261$. Tony skjønte straks at dette også måtte være feil, og forklarte så at han var svært usikker fordi han ikke visste hva symbolet var for å *legge på det minste tallet*.

Forklar hvilket begrep Tony her viser manglende forståelse av. Og forklar hvilke problemer dette kan gi når Tony skal lære seg algebra.

Løsning: Tony viser manglende forståelse av subtraksjonsbegrepet. Subtraksjon kan både være å ta noe vekk, og å finne forskjellen mellom to tall. Mange elever har problemer med å forstå at subtraksjon kan brukes i sistnevnte sammenheng. I Booths artikkel kommer det frem at elever, når de blir spurt om å finne forskjellen mellom to tall, tar det minste tallet og prøver å legge på ulike tall for å se om summen blir det største av de to oppgitte tallene. Fordi disse elevene som regel får ut riktig svar på de aktuelle regnestykkene, går det ofte lang tid uten at man oppdager at elevene har en mangelfull forståelse av subtraksjonsbegrepet.

Når elever får en innføring i algebra, kan det gis tekstoppgaver som f.eks. «Familien Green skal kjøre *x* miles fra London til Leeds. De tar en pause etter *y* miles. Hvor mange miles har de da igjen å kjøre?» Elever som ikke forstår at subtraksjon kan brukes for å finne forskjellen mellom to størrelser, vil her ikke være i stand til å finne svaret (som er $x - y$).

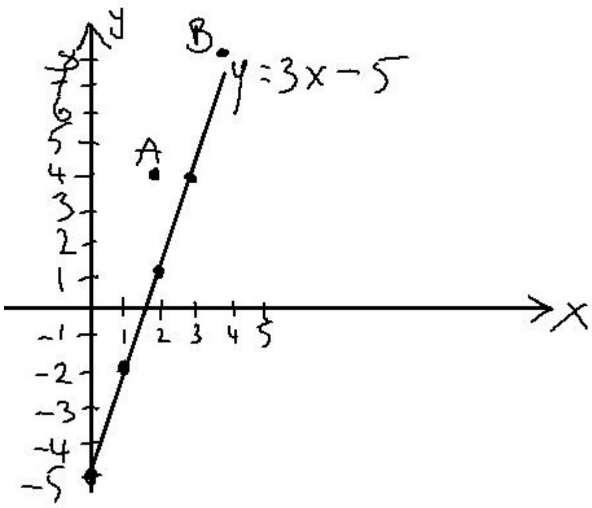
Et annet problem som har kommet mye frem i litteraturen, er at elever tror at bokstavene i algebra står for objekter. Bakgrunnen for dette er todelt. For det første er bokstaver brukt bl.a. i skolegeometrien, og dette kan lede elever til å tro at bokstavene fortsatt står for objekter når de begynner med algebra. For det andre er algebra (som vi her har sett) en generalisering av metoder som er innført i tallregningen. Men hvis elevene ikke har fått med seg disse regnemetodene, blir det ekstra vanskelig å få noe mening ut av algebraen. Og objekttenkningen kan da virke mer meningsfull for disse elevene enn å betrakte bokstavene som tall.

OPPGAVE 4 (20 %)

La $f(x) = 3x - 5$, la $A = (2, 4)$, og $B = (4, 8)$.

a) Tegn inn grafen til $f(x)$ i et koordinatsystem, og merk av punktene A og B.

Løsning: Se figur.



b) Finn ved regning funksjonsuttrykket til grafen som går gjennom A, og som er parallell med grafen til $f(x)$.

Løsning: Parallell med $f(x)$ betyr at stigningstallet er 3. Altså er funksjonen gitt ved $y = 3x + b$. Vi må finne b.
Siden grafen går gjennom $A = (2, 4)$, betyr dette at vi kan bytte ut x med 2 og y med 4, slik at vi får
$4 = 3 \cdot 2 + b$
Det følger at $b = -2$.
Altså er funksjonen gitt ved $y = 3x - 2$.

c) Finn ved regning funksjonsuttrykket til linjen som går gjennom A og B.

Løsning: Vi finner først stigningstallet. Det er $\frac{økning\ i\ y}{økning\ i\ x}$. Altså $\frac{8-4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$. Altså er linjen gitt ved $y = 2x + b$. Vi må finne b.
Vi setter inn $(x, y) = (2,4)$. (Det går også greit å sette inn $(x, y) = (4,8)$.) Vi får da
$4 = 2 \cdot 2 + b$.
Det følger da at $b = 0$. Så funksjonen er gitt ved $y = 2x$.

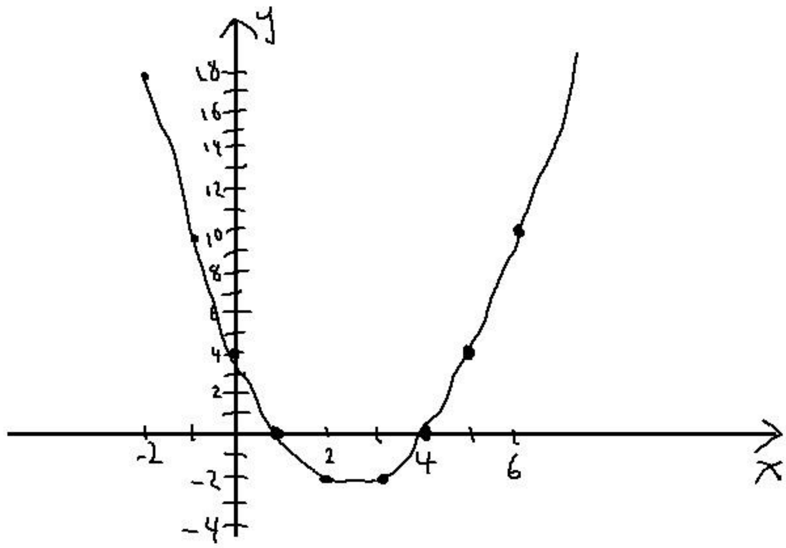
La $g(x) = x^2 - 5x + 4$.

d) Sett opp en x, y-tabell og skisser grafen.

Løsning:

x	y
–2	$(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 4 = 4 + 10 + 4 = 18$
–1	$(-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 4 = 1 + 5 + 4 = 10$
0	4
1	$1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 0$
2	$2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = -2$
3	$3^2 - 5 \cdot 3 + 4 = -2$
4	$4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 0$
5	$5^2 - 5 \cdot 5 + 4 = 4$
6	$6^2 - 5 \cdot 6 + 4 = 10$

Se figur:



e) Finn nullpunktene og bunnpunktet til $g(x)$.

Løsning: Nullpunkter finner vi slik:
$x^2 - 5x + 4 = 0$
Vi bruker andregradsformelen:
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2}$, hvilket gir oss $x = 1$ og $x = 4$.
(Det går forsåvidt an å også bare henvise til tabellen i (d)-oppgaven, der vi ser direkte at nullpunktene er $(1, 0)$ og $(4, 0)$.)
Bunnpunktet ligger midt mellom nullpunktene. Altså: $x = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$. Vi får da $y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 4 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{16}{4} = -\frac{9}{4}$. Bunnpunktet er altså $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.
Det går også greit å svare med desimaltall.

OPPGAVE 5 (16 %)

På udir.no kan man lese om resultatene av de nasjonale prøvene som ble tatt i 2012. I regning for 5. trinn vil de nasjonale prøvene avgjøre om du hører til i mestringsnivå 1, 2 eller 3. I denne oppgaven her skal vi tolke mestringsnivå som *score*. Altså kan du få 1, 2 eller 3 poeng på den nasjonale prøven i regning.

7 elever i din klasse har tatt den nasjonale prøven i regning. De fikk følgende poeng:

3 2 1 3 2 3 1

a) Regn ut median, gjennomsnitt og standardavvik.

Løsning: Median finner vi slik:

1 1 2 2 3 3 3. Det midterste tallet er 2. Altså er medianen 2.

Gjennomsnitt: $\bar{x} = \frac{1+1+2+2+3+3+3}{7} \approx 2{,}14.$

Standardavvik: $S = \sqrt{\frac{2\cdot(1-2{,}14)^2+2\cdot(2-2{,}14)^2+3\cdot(3-2{,}14)^2}{7}} = \sqrt{\frac{2{,}60+0{,}04+2{,}21}{7}} = 0{,}83.$

I rapporten fra udir.no kom det frem at gjennomsnittet på landsbasis var 2,0, mens standardavviket var på 0,34.

b) Hvor vil vi finne den største andelen elever som fikk 3 poeng? I din klasse eller på landsbasis? Forklar hvorfor.

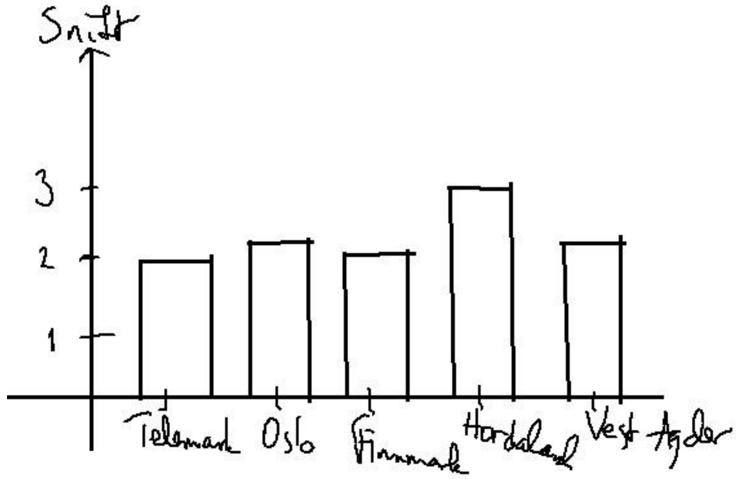
Løsning: Vi finner den største andelen i min klasse. Snittene er omtrent på samme nivå, mens standardavviket i min klasse er langt høyere enn på landsbasis. Dette betyr at vi i min klasse vil finne en større andel elever med 1 poeng, men også en større andel elever med 3 poeng.

I rapporten fra udir.no er det også presentert resultater for de ulike fylkene. Vi presenterer her noen av dem:

Telemark: 1,9
Oslo: 2,2
Finnmark: 1,9
Hordaland: 2,9
Vest-Agder: 2,0

c) Lag et søylediagram og sektordiagram over resultatene.

Løsning: Søylediagrammet er her:



For å lage sektordiagram må vi først lage en score-tabell der vi regner ut gradene:

Fylke	Score	Grader
Telemark	1,9	62,75
Oslo	2,2	72,66
Finnmark	1,9	62,75
Hordaland	2,9	95,78
Vest-Agder	2,0	66,06
Sum	10,9	360

d) Hvilket av diagrammene i (c)-oppgaven gir mest mening? Forklar hvorfor.

Løsning: Søylediagrammet gir mest mening. Sektordiagrammet gir inntrykk av at det er et visst antall poeng som skal fordeles på de ulike fylkene, der f.eks. Hordaland har ca. en fjerdedel av poengene. Vi får ikke et godt bilde av situasjonen. I søylediagrammet ser vi helt klart at 3 poeng er det meste man kan få, og at f.eks. Hordaland ligger nesten på det nivået, mens f.eks. Vest-Agder ligger på $\frac{2}{3}$ av det man maksimalt kan få.
I tillegg er sektordiagrammet svært dårlig når man skal sammenligne fylkene. Vi ser ikke i det hele tatt at Oslo har et bedre snitt enn Telemark, Vest-Agder og Finnmark. Men i søylediagrammet kommer det mye klarere frem.

(Det bør forresten nevnes her at Hordaland i virkeligheten ikke fikk 2,9 poeng, men heller 1,9.)

OPPGAVE 6 (9 %)

Du har en mynt som det er en skjevhet på. Når du kaster den, er sjansen 0,55 for at du får kron, og 0,45 for at du får mynt. Hvis du kaster mynten to ganger, hva er sannsynligheten for at du får tilsammen en mynt og en kron?

Løsning: Hvis du har lyst å få en mynt og en kron, kan det være at du får først en mynt og etterpå en kron, eller du får først en kron og etter en mynt.

P(en mynt og en kron)= P(først mynt og andre kron) +P(først kron og andre mynt)

= $0{,}45 \cdot 0{,}55 + 0{,}55 \cdot 0{,}45$ =0,495

Derfor det er 0,495 sannsynligheten for at du får en mynt og en kron.

OPPGAVE 7 (11 %)

Det er 3 blå kuler, 2 røde kuler, 4 svarte kuler og 1 hvit kule i en boks.

a) Du trekker 1 kule tilfeldig fra boksen. Hvilke mulige utfall har du?
Løsning: Mulige utfall = {en blå kule, en rød kule, en svart kule, en hvit kule}.
(Vi kan også si at mulige utfall ={blå 1, blå 2, blå 3, rød 1, rød 2, svarte 1, svarte 2, svarte 3, svarte 4, hvit} også neste oppgave kan du gjøre slik at den svarer til disse utfallene)

b) Finn sannsynligheten for hvert utfall.
Løsning: P(blå) = $\frac{3}{10}$.
P(rød) = $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
P(svarte) = $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

P(hvit) = $\frac{1}{10}$

c) Hvis du trekker fra boksen to ganger uten tilbakelegging, hva er sannsynligheten for at kulene du trekker, har samme farge?

Løsning:

P(du får to kuler av samme farge)

= P((blå,blå))+P((rød, rød))+P((svart, svart))

= $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$