Høgskolen i Sørøst-Norge

Eksamen i matematikk 102 - løsningsforslag		BOKMÅL
Emnekode: MAT102		Ordinær prøve
Tid:	5 timer	Dato: 2.6.2015
Hjelpemidler: Kalkulator, linjal, tegne- og skrivesaker		Studiested: Nett, Notodden
Antall sider:	4 + formelark og LK06. Totalt 19 sider.	

NB. Alle svar skal begrunnes. Vis utregningene.

Oppgave 1 (vekt 20%)

a) Skriv uttrykket så enkelt som mulig.

$$\frac{a^2-16}{a-4}+a+4$$

Løsning

$$\frac{a^2-16}{a-4}+a+4=\frac{(a+4)(a-4)}{a-4}+a+4=a+4+a+4=2a+8$$

b) Løs ligningen:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{x+2}{5}$$

Løsning

$$\frac{x-4}{3}=\frac{x+2}{5} \qquad |\cdot 15$$

$$(x-4)\cdot 5=(x+2)\cdot 3$$
$$5x-20=3x+6$$
$$2x=26$$
$$\underline{\underline{x=13}}$$

c) Du skal jobbe med likninger på mellomtrinnet. Hvilke metoder benytter du deg av for at elevene skal få forståelse for hva en likning er og hvordan vi kan løse den?

Løsning

Gjett og sjekk, arbeide baklengs, dekk over, bruk av konkreter f.eks en vekt, likhetsprinsippet, addisjons og multiplikasjonsprinsippet.

d) Løs ligningssystemet nedenfor med regning:

$3x - y = 5$
$2x + 3y = 18$

Løsning

Vi kan bruke både innsettingsmetoden og addisjonsmetoden. Vi viser addisjonsmetoden her.

$3x - y = 5 \quad | \cdot 3$ (1)
$2x + 3y = 18$ (2)

$9x - 3y = 15$ (1)
$2x + 3y = 18$ (2)

$11x = 33$ *(1+2)*

$\underline{\underline{x = 3}}$ *(1+2)*

Vi setter dette inn i 1 og får

$3 \cdot 3 - y = 5$

$9 - y = 5$

$\underline{\underline{y = 4}}$

e) Løs likningen under med fullstendig kvadraters metode

$x^2 + 8x + 15 = 0$

Løsning

$x^2 + 8x + 15 = 0$

$x^2 + 8x = -15$

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -15 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 8x + 4^2 = -15 + 4^2$$

$$(x + 4)^2 = 1$$

$$\sqrt{(x + 4)^2} = \mp\sqrt{1}$$

$$x + 4 = \mp 1$$

$x = 1 - 4 = -3$ eller $x = -1 - 4 = -5$

$x = -3$ eller $x = -5$

Oppgave 2 (vekt 20%)

Noen elever i din 6. klasse deltar i en stafett som skolen arrangerer. Alle elevene løper samme etappe. Tiden som hver enkelt elev bruker på etappen er:

42 45 38 41 36 38

a) Finn gjennomsnitt, median og typetall

Løsning

Median: Stiller opp tallene fra minst til størst:

36 38 $\boxed{38 \quad 41}$ 42 45

Medianen er gjennomsnittet av de i midten, altså 39,5.

Gjennomsnitt: $\frac{42+45+38+41+36+38}{6} = 40$

Typetallet er 38 siden den forekommer to ganger og de andre bare en gang

b) Regn ut standardavviket.

Løsning

Standardavvik:

$$s = \sqrt{\frac{(42-40)^2+(45-40)^2+(38-40)^2+(41-40)^2+(36-40)^2+(38-40)^2}{6}} = 3$$

c) Variasjonsbredde er et annet spredningsmål. Forklar hvordan vi regner ut variasjonsbredde. Forklar kort hvilke fordeler og ulemper variasjonsbredde har. Bruk gjerne et konkret eksempel for å belyse dette.

Løsning

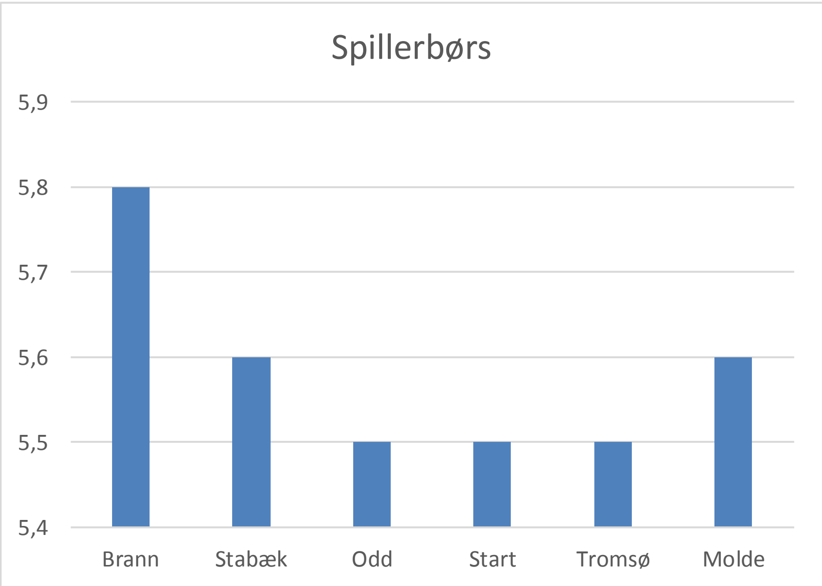
Variasjonsbredde vil si at du tar største verdi minus minsteverdi. La oss se på et eksempel. En gruppe mennesker drar på tur. De er i alderen 34, 32, 36, 35, 34 år. Her vil variasjonsbredden være 4 og vi ser at det er liten spredning. Dersom en av dem hadde hatt en 1 åring ville variasjonsbredden blitt 35. Den er veldig høy, og den ene ekstremverdien gjør at vi får et feil bilde av spedningen. Hadde gruppen vært sammensatt som dette 34, 1, 33, 2, 36, 3, 35, 4 ville variasjonsbredden her også vært 35. Den største ulempen med variasjonsbredde er at om den er stor så vet vi ikke om det skyldes en ekstremverdi eller om spredningen faktisk er stor. Fordelen med målet er at det er svært enkelt å regne ut.

d) Denne stafetten arrangeres for alle elevene i 6. klasse i kommunen. Totalt var det 160 elever som løp en etappe i stafetten. Gjennomsnittstiden for alle som løp var 42 sekunder og standardavviket var 7. Gi en beskrivelse av hvordan elevene dine gjorde det sammenliknet med alle som løp etappen.

Løsning

Vi ser at snittet i hele kommunen er litt over det som den var i vår klasse. Standardavviket er betydelig større. Med andre ord betyr det at vår klasse var noe bedre enn gjennomsnittet for kommunen. På den annen side var spredningen større slik at det er flere der som har løpt virkelig fort og flere som har løpt sakte.

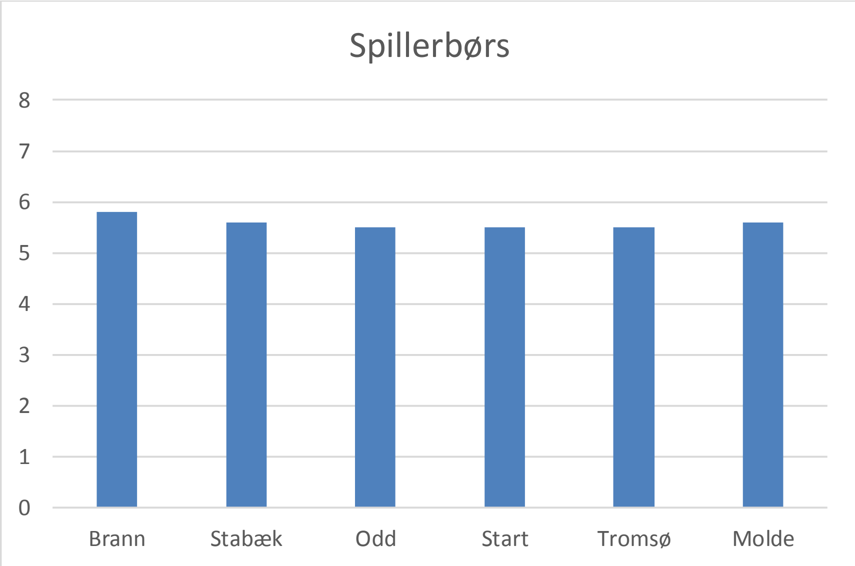
e) Mange av de norske avisene gir poeng for spillerens prestasjoner i eliteserien i fotball. Skalaen går vanligvis fra 1 til 10. I en bestemt måned er gjennomsnittet til spillerne i noen av klubbene presentert som vist i diagrammet under



Hvordan vil du vurdere Brann sin prestasjon sammenliknet med de andre lagene. Gir dette diagrammet et riktig bilde av virkeligheten? Skisser hvordan du ville presentert dette i en mer objektiv form.

Løsning

Her virker det som Brann har vært mye bedre enn de andre klubbene. Ser vi nærmere på diagrammet ser vi at y-aksen starter på 5,4 og går til 5,9. Brann hadde en score på 5,8 mens de tre svakeste klubbene hadde en score på 5,5. Forskjellene er med andre ord små. Diagrammet lurer oss til å tro at Brann er bedre enn de faktisk er sammenliknet med de andre klubbene. En mer objektiv fremstilling kan se slik ut.



Oppgave 3 (vekt 20%)

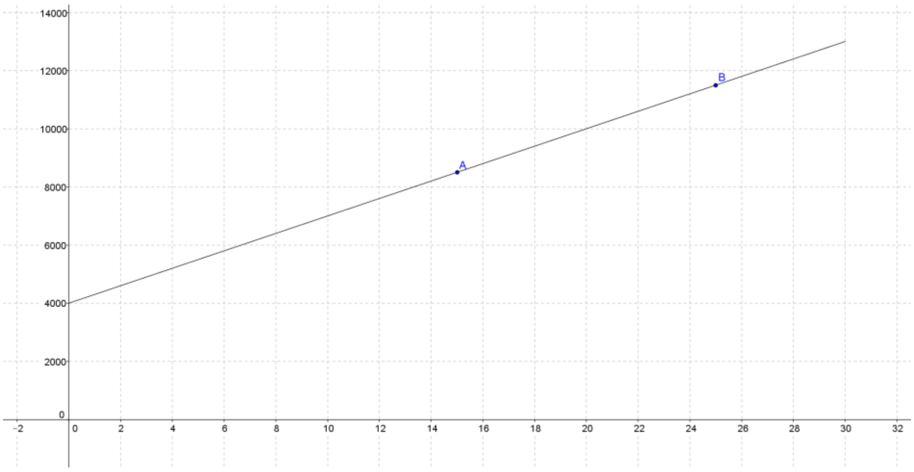
Klassen din på 30 elever kal reise på tur. De skal kjøre buss et stykke av veien, før de tar en båt ut til plassen de skal være. Læreren kontakter en reisearrangør for å få et pristilbud for turen. Reiseselskapet forklarer at de må betale en fast sum for bussen uavhengig av hvor mange elever som skal være med, men at for båtbilletten er det en pris per elev.

Reiseselskapet sier at om 15 elever blir med vil det koste totalt 8500 kroner. De forteller også at om 25 elever blir med vil det koste 11500 kroner

a) Lag et koordinatsystem der verdien på x-aksen er antall elever og y er utgiftene som klassen har på turen. Tegn opp punktene i et koordinatsystem og trekk opp en rett linje som går gjennom punktene. Bruk dette til å finne ut hvor mye leie av bussen koster.

Løsning

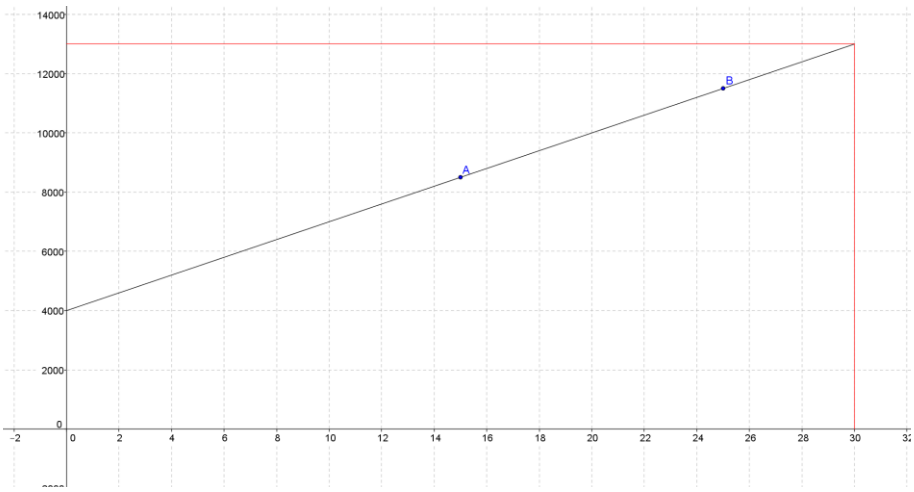
Koordinatsystemet er vist på neste side



Det vil koste 4000 å leie bussen siden grafen skjærer y aksen på 4000.

b) Bruk grafen til å finne ut hvor mye det vil koste for klassen om alle 30 elevene blir med.

Løsning



Vi ser at om alle 30 elevene er med vil det koste 13 000 kroner for hele klassen.

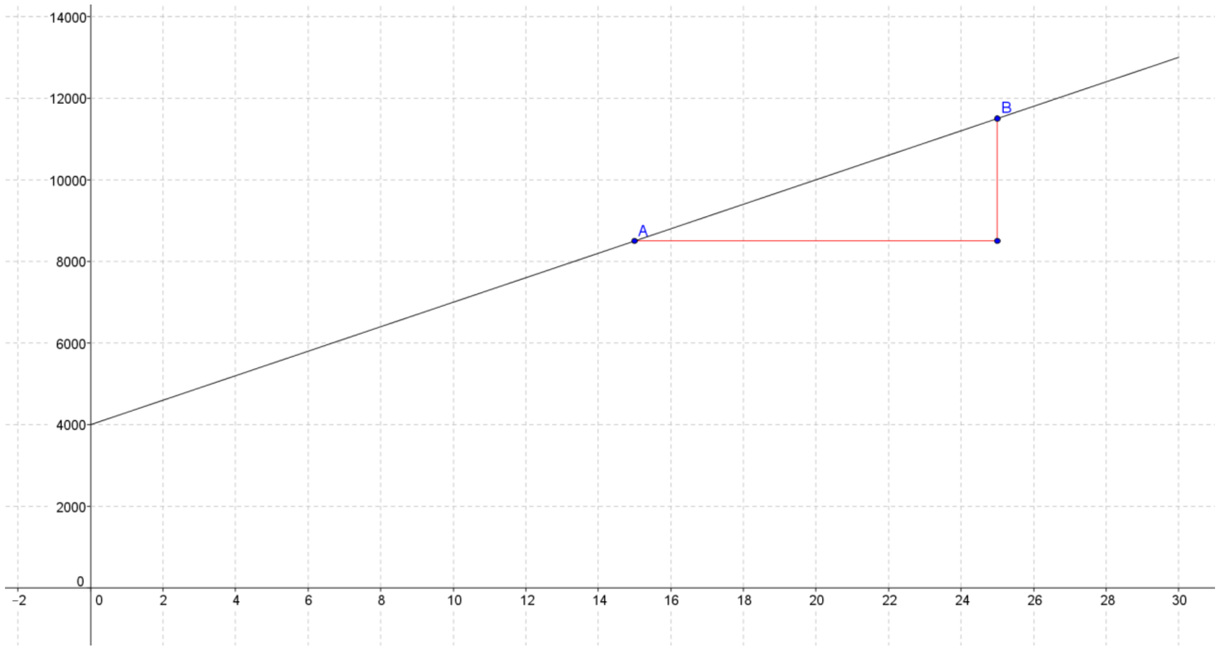
c) Finn en funksjon som beskriver sammenhengen mellom antall elever som skal være med og hva det koster for klassen.

Løsning

Det er mange måter å løse denne på. Her er en måte. Vi vet at det er en rett linje og da må den være på formen

$y = ax + b$

Vi finner stigningstallet ut fra figuren



Vi ser at $a = \frac{11500-8500}{25-15} = 300$

Vi kan finne b ved å bruke et av punktene, f. eks $(15{,}8500)$. Da får vi

$8500 = 300 \cdot 15 + b$

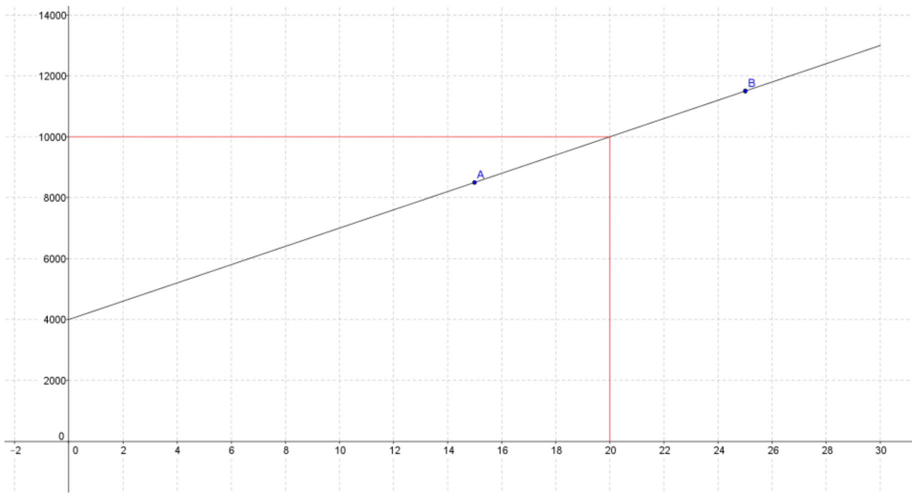
$8500 = 4500 + b$

$b = 4000$

Funksjonen blir dermed $y = 300x + 4000$

d) Bruk grafen til å finne ut hvor mange elever som er med på turen dersom utgiftene er 10000 kroner. Finn også svaret ved regning.

Løsning



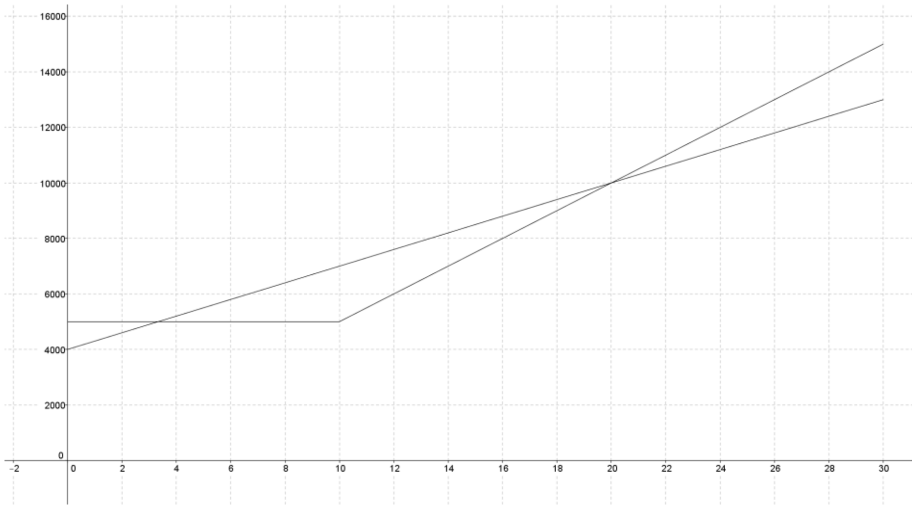
Vi ser at om turen koster 10 000 kroner vil 20 elever være med.

Vi skal også finne det ved regning. Vi får da

$$10000 = 300x + 4000$$
$$6000 = 300x$$
$$x = 20$$

e) Et annet reiseselskap har også kommet med et tilbud til klassen. Deres tilbud er at det koster fast 5000 kroner for buss og båt til sammen for opptil 10 elever. Dersom det er blir med mer enn 10 elever skal det betales 500 kroner ekstra for hver elev. Skisser i samme koordinatsystem hvordan grafen til denne funksjonen vil se ut.

Løsning



Oppgave 4 (vekt 20%)

Vi har funksjonen

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

a) Finn funksjonens nullpunkter og funksjonens bunnpunkt ved regning.

Løsning

Vi finner først nullpunktene

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \mp \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \mp \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \mp 5}{2}$$

$x = 3$ og $x = -2$

Bunnpunktet ligger mitt mellom nullpunktene, altså for $x = 0{,}5$

Alternativt kunne vi funnet det ved å regne ut

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot 1} = 0{,}5$$

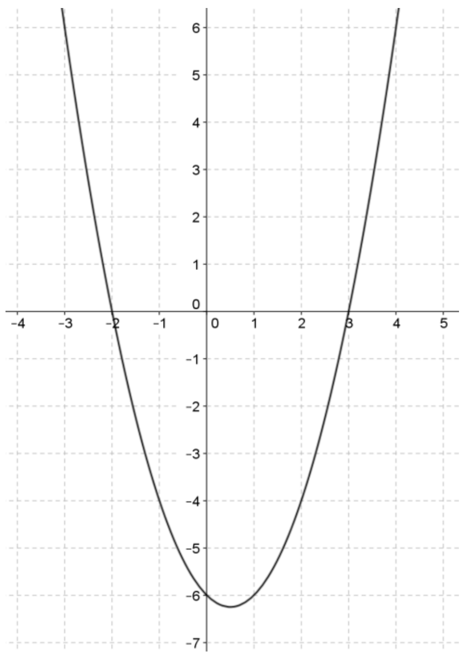
Vi beregner også tilhørende y-verdi.

$$\mathrm{y} = 0{,}5^2 - 0{,}5 - 6 = -6{,}25$$

b) Lag en skisse av grafen.

Løsning

Her er grafen i GeoGebra



Vi har funksjonen som er gitt ved

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$$

c) Finn funksjonens asymptoter.

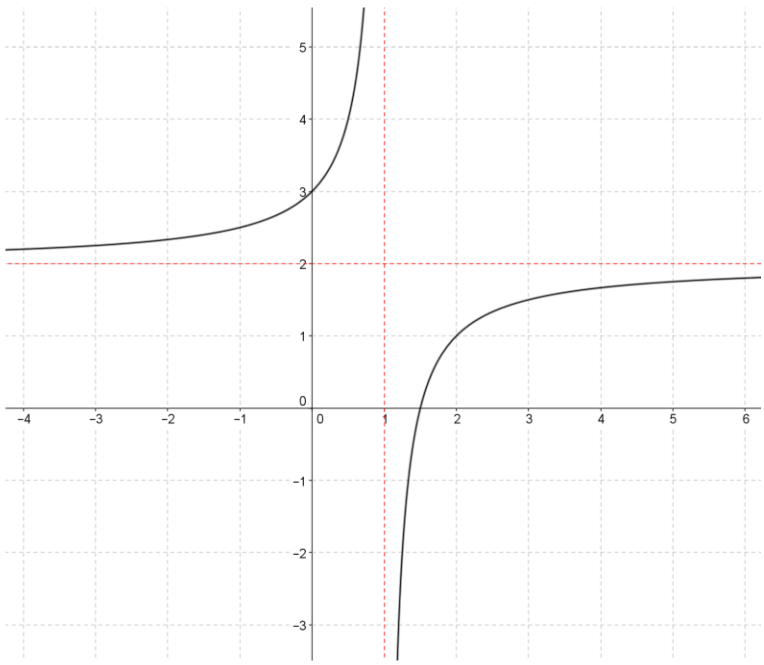
Løsning

Funksjonen har to asymptoter. Den ene som er den vertikale finner vi når nevneren er lik 0, med andre ord når $x = 1$. Den andre vil være en horisontal asymptote. Vi ser at hvis $x \to \infty$ vil $f(x) \to 2$ slik at $y = 2$ blir en horisontal asymptote.

d) Lag en skisse av grafen.

Løsning

Her er grafen i GeoGebra



Oppgave 5 (vekt 20%)

En klasse skal på båttur. Det er 14 elever i klassen, 9 jenter og 5 gutter, og det er to lærere med på turen.

a) I hvor mange ulike rekkefølger kan de 16 personene gå om bord i båten?

Løsning

Her kan vi tenke at for første som går om bord har vi 16 valg. For neste person har vi 15 valg. Slik fortetter vi til alle har gått om bord. Antall kombinasjoner blir

$16! = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2{,}0922 \cdot 10^{13}$

Skriver vi ut tallet får vi 20922789888000.

Det er nok å skrive svaret som vist i første linjen.

b) I hvor mange ulike rekkefølger kan de 16 gå om bord dersom en av lærerne skal gå først og den andre sist?

Løsning

Personene skal gå om bord i denne rekkefølgen. Vi L står for lærer og E for elev

L E E E E E E E E E E E E E E L

Siden det skal gå en lærer om bord først har vi to valg for første person. Neste skal være en elev og her er det 14 valg. Neste deretter skal også være en elev og her har vi da 13 valg. Slik fortsetter vi til alle elevene har gått om bord. Siste personen vil være den andre læreren og her har da bare et valg. Vi kan sette dette opp slik. Jeg setter opp oversikten over når de går om bord først og tallene under

L E E E E E E E E E E E E E E L

$2 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1{,}7436 \cdot 10^{11}$

Skriver vi dette ut får vi 174356582400

De skal gjøre noen naturfagøvelser underveis, og tre elever skal måle vanntemperaturer. Det skal være tre jenter.

c) På hvor mange måter kan de tre jentene trekkes ut?

Løsning

Her har vi et uordnet utvalg uten tilbakelegging, siden rekkefølgen ikke er viktig og siden hver person bare kan trekkes ut en gang. Antall måter vi kan trekke ut 3 jenter av 9 på blir da $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$. Vi kan også bruke nCr knappen på kalkulatoren og slå inn

9 nCr 3 som også gir 84 som svar.

Det blir trukket fire elever (uavhengig av kjønn) som skal stå for pølsegrilling.

d) Hvor sannsynlig er det at blir trukket bare jenter?

Løsning

Vi skal trekke ut fire personer. Siden det i utgangspunktet er 9 jenter av 14 elever har vi $\frac{9}{14}$ sjanse for å trekke ut en jente på som første person. Hvis vi trekker ut en jente først er det kun 8 jenter av 13 elever igjen og sjansen for at neste også blir jente blir $\frac{8}{13}$. Sjansen for at tredje person blir jente blir $\frac{7}{12}$ og sjansen for at siste blir en jente er $\frac{6}{11}$. Sannsynligheten blir derfor

$$P = \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = 0{,}1259$$

Det finnes en alterativ måte å tenke på også. Vi kan se på antall jentekombinasjoner i forhold til totale antall kombinasjoner. Da får vi

$$P = \frac{\binom{9}{4}}{\binom{14}{4}} = \frac{126}{1001} = 0{,}1259$$

e) Hvor sannsynlig er det at blir trukket minst en gutt?

Løsning

Her tenker vi motsatt. Sannsynligheten for minst en gutt vil være lik 1 minus sannsynligheten for ingen gutter, altså

$$P(\text{minst en gutt}) = 1 - P(\text{ingen gutter})$$

Sjansen for ingen gutter er den samme som sjansen for kun jenter som vi fant i spørsmål d). Svaret her blir derfor

$$P(\text{minst en gutt}) = 1 - 0{,}1259 = 0{,}8741$$

Formelark

Formler i algebra

$a^0 = 1$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Andregradsligninger

Hvis $ax^2 + bx + c = 0$, er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ettpunktsformelen: $y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$

Topunktsformelen: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$

Symmetrilinje andregradsfunksjoner: $x = -\frac{b}{2a}$

Standardavvik

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Gjennomsnittlig absoluttavvik

$$\text{ga} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Ordnet trekning med tilbakeleggning: n^k

Ordnet trekning uten tilbakeleggning: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Uordnet trekning uten tilbakeleggning: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Binomisk sannsynlighet: Dersom vi gjør n forsøk der sannsynligheten for at et bestemt utfall er lik p på hvert enkelt forsøk vil sannsynligheten for å få å oppnå suksess i k forsøk være gitt ved $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$