Løsningsforslag til eksamenen i MAT103, våren 2015

Oppgave 1 (vekt 10%)

a) Et tall a er et partall hvis a er delelig med 2, dvs $a \equiv 0 (mod\ 2)$. Et tall a er et oddetall hvis a ikke delelig med 2, dvs $a \equiv 1 (mod\ 2)$.
Argumenter for at summen av to oddetall blir et partall.

Løsning: La a og b være to oddetall. Da har vi at $a \equiv 1 (mod\ 2)$ og $b \equiv 1 (mod\ 2)$. Men $a + b \equiv 1 + 1 \equiv 2 \equiv 0 (mod\ 2)$. Derfor $a + b$ er et partall.

b) Pappaen til lille Ole skal på jobbreise. Pappa sier han skal være borte i 20 dager. Hvis pappa reiser på en tirsdag, hvilken ukedag kommer pappa tilbake?

Løsning: Vi knytter mot kongruens modulo 7. Pappa reiser på en tirsdag, da kan vi si det er $2 (mod\ 7)$. Han er borte i 20 dager, så $2 + 20 = 22 \equiv 1 (mod\ 7)$. Det betyr at han kommer tilbake på en mandag.

Oppgave 2 (vekt 12%)

Gitt følgen $(a_n)_{n \in N} = (25,\ 5,\ 1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25},\ \dots)$

a) Avgjør om følgen er aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene. Begrunn svaret. Sett også opp rekursiv og eksplisitt formel for følgen.
Løsning: Vi første sjekker om det er aritmetisk. Vi ser at $a_2 - a_1 = -20$, $a_3 - a_2 = -4$, så det er ikke en aritmetisk følge.
Vi sjekker om det er geometrisk. Vi ser at $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{5}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{5}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{5}, \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{5}$. Så vi ser at det er en geometrisk følge.
Vi ser forholdet mellome leddene er $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{5}$, og dette gir oss en rekursive formel $a_n = \frac{1}{5} \cdot a_{n-1}$.

Observer at

$$a_2 = \frac{1}{5} \cdot a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{5} \cdot a_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot a_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot a_1$$

$$a_4 = \frac{1}{5} \cdot a_3 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot a_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot a_1$$

Så vi ser at den eksplisitte formelen er $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot a_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot 25$ (dette kan forenkles videre til $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot 5^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-3} = \frac{1}{5^{n-3}}$).

b) Finn en eksplisitt formel for summen av den tilhørende rekken S_n (der $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$)).

Løsning: Vi har sett at

$$a_2 = \frac{1}{5} \cdot a_1$$
$$a_3 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot a_1$$
$$a_4 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot a_1$$
$$\cdots$$
$$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot a_1$$

Da har vi at

$$S_n = a_1 + \frac{1}{5} \cdot a_1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot a_1 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot a_1 \,. \qquad (1)$$

Gang likning (1) med $\frac{1}{5}$, får vi at

$$\frac{1}{5} \cdot S_n = \frac{1}{5} \cdot a_1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot a_1 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot a_1 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot a_1. \qquad (2)$$

Nå bruker vi (2) minus (1), og vi får at

$$\frac{1}{5} \cdot S_n - S_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot a_1 - a_1$$
$$\left(\frac{1}{5} - 1\right) \cdot S_n = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1\right) \cdot a_1$$
$$S_n = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1}{\frac{1}{5} - 1} \cdot a_1$$

Siden $a_1 = 25$, da

$$S_n = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1\right) \cdot 25 \cdot (-\frac{5}{4}) = \frac{125}{4} \cdot (1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n)$$

Oppgave 3 (vekt 10%)

a) La a, b, c være heltall. Hvis a går opp i b, og b går opp i c, da går a opp i c. Bevis dette.

Løsning:
Hvis a går opp i b, da har vi at $b = k \cdot a$ for et heltall k. Hvis b går opp i c, da har vi at $c = f \cdot b$ for et heltall f. Da har vi at $c = f \cdot b = f \cdot (k \cdot a) = f \cdot k \cdot a = (f \cdot k) \cdot a$, så c er et multiplum av a, dvs a går opp i c.

b) Hvis du er fortalt at 77 går opp i 1771, vet du om 7 går opp i 1771 ved hjelp av a)?
Løsning:
Vi vet 7|77, og vi er gitt 77|1771, så ifølge a) vi har også 7| 1771.

Oppgave 4 (vekt 25%)

a) Finn fire heltall som er kongruente med 88 $(\text{mod } 5)$.

Løsning: Fire heltall som er kongruente med 88 modulo 5, kan være f.eks.
$88 - 5 = 83, 88 + 5 = 93, 88 - 10 \cdot 5 = 28, 88 + 2 \cdot 5 = 98$.

(Vi kan finne uendelig mange heltall som er kongruent til 88 modulo 5. Egentlig alle tallene som kan skrives som 88$+k \cdot 5$, hvor k er heltall, er kongruent til 88 modulo 5.)

b) Finn ut hvilket siffer som står på enerplassen i tallet $541^{1237489}$.

Løsning: For å finne siffer som står på enerplassen, kan vi finne $541^{1237489}$modulo 10. Men vi ser at $541 \equiv 1$ (mod 10), da har vi $541^{1237489} \equiv 1^{1237489} \equiv 1$(mod 10). Detter sier at sifferet som står på enerplassen i tallet er 1.

c) Delelighetsregelen for 9 forteller oss at et heltall er delelig med 9 hvis og bare hvis tverrsummen i tallet er delelig med 9. Gi et bevis for dette.

Løsning:
Løsning: La $a = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ være et heltall. Vi kan skrive

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Merk at $10 \equiv 1$ (mod 9), så vi vet også at $10^n \equiv 1^n \equiv 1$ (mod 9). Samme med $10^{n-1} \equiv 1$ (mod 9), $10^2 \equiv 1$(mod 9). Derfor har vi
$a \equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + \cdots + a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$ (mod 9)

Dette sier at $a \equiv tverrsummen(a)$ (mod 9). Så a er delelig med 9 hvis og bare hvis tverrsummen av a er delelig med 9.

d) Følgende melding er kryptert på følgende måte: Bokstavene er blitt byttet ut med sine tilhørende tall (A med 1, B med 2, osv.). Deretter er første tall blitt multiplisert med 3 $(\text{mod } 29)$, neste tall er blitt multiplisert med 5 $(\text{mod } 29)$, tredje tall er blitt multiplisert med 6 $(\text{mod } 29)$, og fjerde tall er multiplisert med 10 $(\text{mod } 29)$, femte tall er blitt multiplisert med 3 $(\text{mod } 29)$, osv. slik at vi har en sykel på 3, 5, 6, 10 som gjentar seg selv hele tiden.
Den krypterte meldingen – en drikk kjent for å sterkt redusere risikoen for diabetes 2, Parkinsons, tykktarmkreft, gallestein, hjerteproblemer, m.m. – er som følger:

D E G B O

Løsningsforslag: Bokstavene D, E, G, B, O byttes ut med tallene 4, 5, 7, 2 og 15. Vi løser deretter følgende kongruensligninger:

3x ≡ 4 (mod 29)

5x ≡ 5 (mod 29)

6x ≡ 7 (mod 29)

10x ≡ 2 (mod 29)

3x ≡ 15 (mod 29)

Førstnevnte ligning, 3x ≡ 4 (mod 29), løser vi ved å multiplisere med 10 på begge sider av kongruenstegnet. Vi får da 30x ≡ 40 ≡ 11 (mod 29), og siden 30≡1, får vi at x ≡ 11 (mod 29). Dette tilsvarer bokstaven K.

Den andre ligningen multipliserer vi med 6 på begge sider, og vi får x ≡ 30x ≡ 30 ≡ 1 (mod 29). Dette tilsvarer bokstaven A.

Den tredje ligningen multipliserer vi med 5 på begge sider, og vi får x ≡ 30x ≡ 35 ≡ 6 (mod 29). Dette tilsvarer bokstaven F.

Den fjerde ligningen multipliserer vi med 3 på begge sider, og vi får x ≡ 30x ≡ 6 (mod 29). Dette er enda en F.

Den femte ligningen multipliserer vi med 10 på begge sider, og vi får x ≡ 30x ≡ 150 ≡ 5 (mod 29). Dette tilsvarer bokstaven E.

Drikken vi skulle frem til, er altså KAFFE.

e) Hvis en av krypteringsnøklene hadde vært 11, hva ville dekrypteringsnøkkelen da vært? *(Hint: I krypteringspensumet har vi tatt utgangspunkt i at* $30 \equiv 1\ (mod\ 29)$*. Hvilke andre tall er også* $\equiv 1\ (mod\ 29)$*?)*

Løsningsforslag: Målet er å finne et tall, la oss si x, som er sånn at 11x ≡ 1 (mod 29). I (d)-oppgaven var dette tallet sånn at produktet ble 30 (hvis kryperingsnøkkelen var 5, måtte vi multiplisere med 6; hvis krypteringsnøkkelen var 3, måtte vi multiplisere med 10, osv.). Men i dette tilfellet her må vi finne et annet tall som er ≡ 1 (mod 29).
Vi begynner med å liste opp de første tallene som er ≡ 1 (mod 29), og ser om disse går i 11-gangen. Vi har selvsagt 30, som ikke er i 11-gangen. I tillegg har vi 2·29+1 = 59. Den er ikke i 11-gangen. Vi har 3·29+1 = 88. Den er faktisk i 11-gangen. Vi har nemlig at 11·8 = 88.
Men det betyr at x må være lik 8. Vi har nemlig at 11·8 = 88 ≡ 1 (mod 29).

Oppgave 5 (vekt 20 %)

a) Forklar hva som menes med største felles faktor og minste felles multiplum. Bruk Euclids algoritme for å finne største felles faktor og minste felles multiplum av 45 og 12.
Løsning: La a og b være to heltall. En felles faktor av a og b er et tall som kan går opp både i a og b. Største felles faktor av a og b er den største tall blant alle felles faktorer av a og b.
Et felles multiplum av a og b er et tall som både a og b kan går opp i . Minst felles multiplum av a og b er det minste tall blant alle felles multiplumene av a og b.

Her er hvordan vi kan bruke Euclids algoritme for å finn SFF(45,12) og MFM(45, 12). VI har

$$45 = 3 \cdot 12 + 9,$$

da har vi SFF(45, 12)=SFF(12, 9).

Itillegg $12 = 1 \cdot 9 + 3$, da har vi SFF(12,9)=SFF(9,3). Men $9 = 3 \cdot 3 + 0$, da har vi

SFF(9,3) = SFF(3,0)=3. Derfor SFF(45, 12)=3.

Vi vet at $MFM(45,12) = \frac{45 \cdot 12}{SFF(45,12)} = 180.$

b) Finn eventuelle løsninger av den diofantiske likningen $4x + 8y = 11$.

Løsning:
Vi omformulerer likningen litt. Da får vi

$$4(x + 2y) = 11$$

Det gir oss videre at

$$x + 2y = \frac{11}{4} = 2{,}75$$

Med andre ord, finnes det ingen heltallsløsningener for likningen.

c) Finn den generelle løsningen til den diofantiske likningen $2x + 6y = 8$.

Løsning:
Her må vi dele likningen på 2. Det gir oss

$$x + 3y = 4$$

Her ser vi at $x = 1$ og $y = 1$ er en spesiell løsning. Den generelle løsningen blir da

$x = 1 + 3n$ og $y = 1 - n$

d) En gårdsbruker skal handle inn verpehøner til gården sin. Han kjøper noen kyllinger som er bare noen få dager gammel. Disse koster 45 kroner stykket. I tillegg kjøper han inn noen kyllinger som er 3 uker gammel. Disse koster 56 kroner stykket. Han handlet totalt for 7212 kroner. Spørsmålet er hvor mange kyllinger av hver sort han kan ha kjøpt. Finn dette ut ved å sette opp en diofantisk likning og løs denne.

Løsning*:* Vi kan sette dette opp som en likning. Vi får da

$$45x + 56y = 7212$$

der x er antall kyllinger som er noen få dager gammel og y er antall kyllinger som er 3 uker gammel.

Her må vi vi bruke Euclids algoritme både forlengs og baklengs for å finne en løsning.

$$56 = 1 \cdot 45 + 11 \quad \Rightarrow \quad 11 = 1 \cdot 56 - 1 \cdot 45$$
$$45 = 4 \cdot 11 + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 \cdot 45 - 4 \cdot 11$$

Vi nøster dette opp.

$$1 = 1 \cdot 45 - 4 \cdot 11$$
$$1 = 1 \cdot 45 - 4 \cdot (1 \cdot 56 - 1 \cdot 45)$$
$$1 = -4 \cdot 56 + 5 \cdot 45$$
$$45 \cdot 5 + 56 \cdot (-4) = 1$$

Vi sammenlikner dette uttrykket med likningen $45x + 56y = 1$. Vi ser da at

$x = 5$ og $y = -4$ er løsninger av denne likningen. For å finne løsningene av vår likning må vi gange svarene vi fikk med 7212. Det gir oss

$x = 36060$ og $y = -28848$

Den generelle løsningen blir da

$$x = 36060 + 56n$$
$$y = -28848 - 45n$$

Her er vi kun interessert i positive løsninger så vi setter løsningene større enn 0. Det gir oss

$$x = 36060 + 56n > 0 \quad \Rightarrow \quad 56n > -36060 \quad \Rightarrow \quad n > -643{,}9$$
$$y = -28848 - 45n > 0 \quad \Rightarrow \quad -28848 > 45n \quad \Rightarrow \quad n < -641{,}1$$

Vi ser at det er to verdier for n som passer og det er -642 og -643. Det gir oss

$n = -642$

$$x = 36060 + 56 \cdot (-642)\text{=108}$$
$$y = -28848 - 45 \cdot (-642) = 42$$

$n = -643$

$$x = 36060 + 56 \cdot (-643) = 52$$
$$y = -28848 - 45 \cdot (-643) = 87$$

Oppgave 6 (vekt 11 %)

Beskriv Anna Sfards 3-trinnsprosess i utviklingen av forståelse av et matematisk begrep, der du bruker subtraksjonsbegrepet som eksempel. Hva vil de si at man har utviklet strukturell forståelse for subtraksjonsbegrepet?

Løsning:
Prosessen består av følgende tre trinn: «Interiorization»-fasen, sammentrekningsfasen (evt. kondensasjonsfasen) og tingliggjøringsfasen (evt. reifikasjonsfasen).

I «interiorization»-fasen lærer man den definisjonen som man senere skal oppnå en strukturell forståelse av. F.eks. hvis det er subtraksjon man skal bygge opp en strukturell forståelse av, så lærer man her hva definisjonen på subtraksjon er. Det kan være som hopp bortover tallinjen, f.eks. Man lærer noen eksempler på at hvis man har 10 epler, og man mister 3 epler, da tar man vekk 3 epler fra mengden og teller forfra igjen. Man har her følelsen av at man hele tiden gjør en operasjon på disse tallene, eller at det er en endring som foregår over tid.

Sammentrekningsfasen handler om at man gjentatte ganger går gjennom lengre utregningsprosesser som etter hvert automatiseres. Når det gjelder subtraksjonseksempelet, blir man stadig mer vant til den oppstilte metoden for subtraksjon av flersifrede tall og desimaltall. Men innenfor en del tekstoppgaver er man fortsatt usikker på regnearten (f.eks. forståelsen av hvorfor man skal benytte subtraksjon for å finne størrelsen mellom to tall). Man er kanskje fortsatt usikker på subtraksjon av negative tall, og ihvertfall hva forskjellen er mellom $a–b$ og b–a.

Sammentrekningsfasen beskrives som en drillfase, hvor man over en svært lang tidsperiode går gjennom utregning etter utregning etter utregning for å prøve å bygge opp forståelse rundt teorien. Ifølge Anna Sfards artikkel er det mange matematikere som setter seg fast i denne fasen, og som kanskje aldri kommer til siste fase av forståelsen. Poenget med denne fasen er automatiseringen – at man skal slippe å overbelaste arbeidshukommelsen med deler av teorien som på sikt kan automatiseres. Ved å automatisere frigjør man kapasitet i arbeidshukommelsen som kan brukes til å skaffe seg et overblikk over teorien.

I tingliggjøringsfasen får man en a-ha-opplevelse, når man plutselig føler at man har et fullverdig overblikk over hele teorien. Når det gjelder eksempelet med subtraksjon, får man plutselig et klart bilde i hodet hvordan forholdet er mellom de

negative og positive tallene, og hvordan det fungerer når man hopper frem og tilbake på tallinjen.
Denne fasen beskrives som et kart med pekere til ulike deler av den detaljerte teorien som man kan hente frem etter behov, og slik at man slipper å ha alle delene av teorien tilgjengelig i arbeidshukommelsen samtidig.

Det å ha en strukturell forståelse av subtraksjonsbegrepet, handler om at man klarer å betrakte subtraksjon som forskjellen mellom to elementer på tallinjen, med eller uten negativt fortegn, og at man samtidig alltid vet når dette skal anvendes i de ulike situasjonene (jfr. Skemps kapittel om begrepsutvikling).

Oppgave 7 (vekt 12 %)

I boken *Tall og tanke* skriver forfatterne om additive strukturer. (Det som ble tatt opp på forelesningen om temaet er basert på denne boken.) Denne boken beskriver 3 forskjellige additive strukturer. Det er endring, kombinere/separere og sammenlikning. Dette er en kategorisering av ulike oppgavetyper hvor addisjon inngår.

a) Gi et par eksempler på oppgavetyper innenfor hver av disse kategoriene. Du kan gjerne ta utgangspunkt i eksemplene fra forelesningen.

b) Elevene oppfatter ofte kategorien *endring* som enklere enn de to andre. Hva kan årsaken være til dette?

c) Forfatterne bak boken poengterer at det er viktig at vi som lærere jobber med oppgaver og problemstillinger innen alle de tre kategoriene. Diskuter hvorfor dette er viktig. Bruk læreplanen som støtte.

Formelark MAT103

Summen av de n første heltallene: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Eksplisitt formel for aritmetisk følge: $a_n=a_1+d(n-1)$

Eksplisitt formel for geometrisk følge: $a_n=a_1k^{n-1}$

Eksplisitt formel for summen av en aritmetisk rekke: $S_n=na_1+d\frac{n(n-1)}{2}$

Eksplisitt formel for summen av en geometrisk rekke: $S_n=a_1\frac{k^n-1}{k-1}$

Summen av konvergent geometrisk rekke: $S=\frac{a_1}{1-k}$

Niertesten: La a være et helt positivt tall, og $T(a)$ tverrsummen til a.

Niertesten for addisjon: $T(a+b+\cdots)\equiv[T(a)+T(b)+\cdots](mod\ 9)$

Niertesten for multiplikasjon: $T(a\cdot b\cdot c\cdots)\equiv[T(a)\cdot T(b)\cdot T(c)\cdots](mod\ 9)$

Kongruensregnereglene:

1. $a\equiv a\ (mod\ n)$
2. $a\equiv b\ (mod\ n)\Leftrightarrow b\equiv a\ (mod\ n)$
3. $a\equiv b\ (mod\ n)$ og $b\equiv c\ (mod\ n)\Longrightarrow a\equiv c\ (mod\ n)$
4. $a\equiv b\ (mod\ n)$ og $c\equiv d\ (mod\ n)\Longrightarrow a+c\equiv b+d\ (mod\ n)$ og $ac\equiv bd\ (mod\ n)$
5. $a\equiv b\ (mod\ n)\Longrightarrow a+c\equiv b+c\ (mod\ n)$ og $ac\equiv bc\ (mod\ n)$
6. $a\equiv b\ (mod\ n)\Longrightarrow a^k\equiv b^k(mod\ n)$

Diofantiske likninger

Den lineære diofantiske ligningen $ax+by=c$ har løsning *hvis og bare hvis* $sff(a,b)|c$. Dersom løsninger eksisterer, og (x_0,y_0)er en spesiell løsning, er den generelle løsningen:

$x_n=x_0+b\cdot n$

$y_n=y_0-a\cdot n$

Dette forutsetter at $sff(a,b)=1$. Dersom $sff(a,b)\neq 1$, deler vi først begge sider med $sff(a,b)$.