Løsningsforslag til eksamenen i MAT103, våren 2016

Oppgave 1 (vekt 10%)

a) Sjekk om følgende tall er delelig med 9:

654, 45231, 1236546

Løsning: Et tall er delelig med 9 hvis og bare hvis tverrsummen er delelig med 9.

$6 + 5 + 4 = 15$ er ikke delelig med 9, derfor er ikke 654 delelig med 9.
$4 + 5 + 2 + 3 + 1 = 15$ er ikke delelig med 9, derfor er ikke 45231 delelig med 9.
$1 + 2 + 3 + 6 + 5 + 4 + 6 = 27$ er delelig med 9, derfor er 1236546 delelig med 9.

b) Beskriv delelighetsregelen for 9 og bevis den. Du kan velge hvilket at de to bevisene fra pensum du vil bruke.

Løsning: La $a = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ være et heltall. Vi kan skrive

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Merk at $10 \equiv 1$ (mod 9), så vi vet også at $10^n \equiv 1^n \equiv 1$ (mod9). Samme med $10^{n-1} \equiv 1$ (mod 9), $10^2 \equiv 1$(mod 9). Derfor har vi

$$a \equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + \cdots + a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 \text{ (mod 9)}$$

Dette sier at $a \equiv tverrsummen(a)$ (mod 3). Så a er delelig med 9 hvis og bare hvis tverrsummen av a er delelig med 9.

Vi aksepterer også at dere viser dette med et konkret talleksempler og en kommentar med at tilsvarende resonnement kan gjennomføres for alle tall.

Oppgave 2 (vekt 12%)

a) Gitt følgen $(a_n)_{n \in N} = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$.

Avgjør om følgen er aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene. Begrunn svaret. Sett også opp rekursiv og eksplisitt formel for det *n*. leddet til følgen. Finn også summen av de n første leddene til følgen.

Løsning
Følgen er aritmetisk siden differensen mellom et ledd og det foregående er 2.

Rekursiv formel:

$a_n = a_{n-1} + 2$

Eksplisitt formel:

$a_1 = 1$
$a_2 = 3 = 1 + 1 \cdot 2$
$a_3 = 5 = 1 + 2 \cdot 2$
$a_4 = 7 = 1 + 3 \cdot 2$
$a_5 = 9 = 1 + 4 \cdot 2$
.
.
.
$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

b) Gitt følgen $(a_n)_{n \in N} = (4, 6, 10, 16, 24, 34\ \ldots)$.

Avgjør om følgen er aritmetisk, geometrisk eller ingen av delene. Begrunn svaret. Sett også opp rekursiv og eksplisitt formel for følgen.

Rekken er verken aritmetisk eller geometrisk fordi at differensen mellom et ledd og det foregående ikke er konstant. Forholdet mellom et ledd og det foregående er heller ikke konstant.

Vi ser først på rekursiv formel.

$a_1 = 4$

$a_2 = 6 = 4 + 1 \cdot 2 = a_1 + 1 \cdot 2$

$a_3 = 10 = 6 + 2 \cdot 2 = a_2 + 2 \cdot 2$

$a_4 = 16 = 10 + 3 \cdot 2 = a_3 + 3 \cdot 2$

$a_5 = 24 = 16 + 4 \cdot 2 = a_4 + 4 \cdot 2$

.

$a_n = a_{n-1} + (n-1) \cdot 2 = a_{n-1} + 2n - 2$

For å finne eksplisitt formel bruker vi glidelåsmetoden

$\cancel{a_2} - a_1 = 2 = 2 \cdot 1$

$\cancel{a_3} - \cancel{a_2} = 4 = 2 \cdot 2$

$\cancel{a_4} - \cancel{a_3} = 6 = 2 \cdot 3$

$\cancel{a_5} - \cancel{a_4} = 8 = 2 \cdot 4$

.

$a_n - \cancel{a_{n-1}} = 2 \cdot (n-1)$

=========================

$a_n - 4 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1))$

$$a_n - 4 = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$a_n = n(n-1) + 3 = n^2 - n + 4$

Oppgave 3 (vekt 30%)

a) Finn minste ikke-negative heltall kongruent til 100 + 92 (mod 9).

Løsning: Vi bruker addisjonssetningen, og får 100 + 92 ≡ 1 + 2 = 3 (mod 9)

b) Hvilket tall står på enerplassen i $9^{47284279}$?

Løsning: Vi skal finne minste ikke-negative heltallet kongruent til $9^{47284279} \pmod{10}$. Vi har 9 ≡ (–1) (mod 10), så $9^{47284279} \equiv (-1)^{47284279} = -1 \equiv 9 \pmod{10}$. Altså er det 9 som står på enerplassen i $9^{47284279}$.

c) Løs kongruensligningen 10x – 15 ≡ 4x + 10 (mod 23). Oppgi svaret med minste ikke-negative heltall (mod 23).

Løsning: Vi rydder og får 6x ≡ 25 (mod 23), og siden 25 ≡ 2 (mod 23), får vi ligningen 6x ≡ 2 (mod 23). Vi multipliserer med 4 på begge sider, og får x ≡ 8 (mod 23).

d) Finn eventuelle løsninger til kongruensligningen 3x ≡ 5 (mod 9), eller forklar hvorfor *ingen løsning eksisterer.*

Løsning: Ingen løsning eksisterer, fordi sff(3, 9) = 3, og dette går ikke opp i 5. En annen måte å se det på, er at et multippel av 3 alltid vil være 0, 3 eller 6 over et tall i 9-gangen, dvs. ha rest 0, 3 eller 6 når man dividerer med 9. Ligningen $3x \equiv 5 \pmod 9$ ber oss om å finne en x slik at $3x$ har rest 5 når det divideres med 9, hvilket dermed er umulig.

En tredje måte å se det på er å gjøre om til en diofantisk ligning. Vi får da ligningen $3x - 9y = 5$. På venstre side av likhetstegnet har vi et multippel av 3, mens høyre side ikke er delelig med 3, og det er umulig.

e) Løs den diofantiske ligningen $31x + 8y = 54$ ved å gjøre om til en kongruensligning og løse for x. Bruk løsningen for x til å finne y i den diofantiske ligningen.

Løsning: Vi får $31x - 54 = -8y$, dvs. $31x - 54 \equiv 0 \pmod 8$. Dette gir oss at $31x \equiv 54 \pmod 8$. Vi får $-x \equiv 6 \pmod 8$, og dermed at $x \equiv -6 \equiv 2 \pmod 8$. Med språket til diofantiske ligninger er dette $x = 2 + 8n$ for alle mulige heltall n. Vi setter inn $x = 2$ i den diofantiske ligningen og får $31 \cdot 2 + 8y = 54$. Dette gir oss at $y = -1$ som spesiell løsning. Generell løsning blir $y = -1 - 31n$.

f) På kurset lærte vi hvordan man kan bruke kongruensregning for å vise at et tall er delelig med 3 hvis og bare hvis tverrsummen er delelig med 3. Gi beviset for dette.

Løsning: Vi kan skrive et tall som $a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, der $a_n, \ldots, a_2, a_1, a_0$ er sifrene til tallet. Dette tallet er delelig med 3 hvis og bare hvis det er $\equiv 0 \pmod 3$. Vi har videre at $10 \equiv 1 \pmod 3$, så vi får $a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \equiv a_n \cdot 1^n + \cdots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1^1 + a_0 = a_n + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$, som er tverrsummen til tallet. Så tallet er er $\equiv 0 \pmod 3$ hvis og bare hvis tverrsummen er er $\equiv 0 \pmod 3$, og det var det vi ønsket å vise. Q.E.D.

g) Følgende melding er kryptert på følgende måte: Bokstavene er blitt byttet ut med sine tilhørende tall (A med 1, B med 2, osv.). Deretter er første tall blitt multiplisert med $7 \pmod{29}$, neste tall er blitt multiplisert med $10 \pmod{29}$, tredje tall er blitt multiplisert med $5 \pmod{29}$, og fjerde tall er multiplisert med $14 \pmod{29}$, femte tall er blitt multiplisert med $7 \pmod{29}$, osv. Slik at vi har en sykel på 7, 10, 5, 14 som gjentar seg selv hele tiden.
Den krypterte meldingen, en metallgjenstand som amerikanerne har et kjærlig forhold til, er som følger:
I Å V L K

Løsning: Vi gjør om til tall og får 9   29   22   12   11. 9-eren gir oss kongruensligningen $7x \equiv 9 \pmod{29}$. Vi multipliserer med 4 på begge sider og får $-x \equiv 36 \equiv 7 \pmod{29}$, altså $x \equiv -7 \equiv 22 \pmod{29}$. Første bokstav er altså V.
Vi finner andre bokstav, som passer til 29-tallet. Det er ligningen $10x \equiv 29 \pmod{29}$. Det er det samme som $10x \equiv 0 \pmod{29}$. Vi ganger med 3 på begge sider og får $x \equiv 0 \equiv 29 \pmod{29}$, altså er det en Å.
Tredje bokstav: $5x \equiv 22 \pmod{29}$. Vi multipliserer med 6 på begge sider og får $x \equiv 22 \cdot 6 \equiv 16 \pmod{29}$. Det er en P.
Fjerde bokstav: $14x \equiv 12 \pmod{29}$. Multipliserer med 2 på begge sider og får $-x \equiv 24 \pmod{29}$, altså $x \equiv -24 \equiv 5 \pmod{29}$. Dette er en E.
Siste bokstav: $7x \equiv 11 \pmod{29}$. Multipliserer med 4 på begge sider og får $-x \equiv 44 \equiv 15 \pmod{29}$. Vi får $x \equiv -15 \equiv 14 \pmod{29}$. Det er en N.

Amerikanerne har altså et kjærlig forhold til *våpen*.

Oppgave 4 (vekt 15%)

a) Finn eventuelle løsninger av den diofantiske likningen $3x + 6y = 13$

Løsning:
Vi omformulerer likningen litt. Da får vi

$$3(x + 2y) = 13$$

Det gir oss videre at

$$x + 2y = \frac{13}{3} = 4{,}3\overline{3}$$

Med andre ord, finnes det ingen heltallsløsningener for likningen.

b) Gjør den diofantiske ligningen i a)-oppgaven om til en kongruensligning med x som ukjent. Har kongruensligningen løsninger? Hvorfor/hvorfor ikke?

Løsning:
Den diofantiske ligningen kan skrives om til $3x - 13 = -6y$, og dermed er $3x - 13 \equiv 0 \pmod{6}$. Vi skriver dette om til $3x \equiv 13 \pmod{6}$. Denne har ingen løsninger, i og med at en løsning på denne ville automatisk innebære en løsning på den diofantiske ligningen i a)-oppgaven.

c) For en tid tilbake var en restauranteier på det lokale fiskemarkedet og handlet inn til restauranten sin. Han kjøpte med seg krabber og hummer. For krabbene betalte han 25 kroner stykket, og for hummeren betalte han 83 kroner stykket. Han handlet for totalt 2365 kroner. Sett opp en diofantisk likning og regn ut hvor mange krabber og hummere han kjøpte, ved å løse denne.

Løsning*:*

Vi kan sette dette opp som en likning. Vi får da

$25x + 83y = 2365$

der x er antall krabber og y er antall hummere.

Her må vi vi bruke Euclids algoritme både forlengs og baklengs for å finne en løsning.

$$\begin{aligned} 83 &= 3 \cdot 25 + 8 &\quad\Rightarrow\quad& 8 = 1 \cdot 83 - 3 \cdot 25 \\ 25 &= 3 \cdot 8 + 1 &\quad\Rightarrow\quad& 1 = 1 \cdot 25 - 3 \cdot 8 \end{aligned}$$

Vi nøster dette opp.

$$\begin{aligned} &1 = 1 \cdot 25 - 3 \cdot 8 \\ &1 = 1 \cdot 25 - 3 \cdot (1 \cdot 83 - 3 \cdot 25) \\ &1 = -3 \cdot 83 + 10 \cdot 25 \\ &25 \cdot 10 + 83 \cdot (-3) = 1 \end{aligned}$$

Vi sammenlikner dette uttrykket med likningen $25x + 83y = 1$. Vi ser da at

$x = 10$ og $y = -3$ er løsninger av denne likningen. For å finne løsningene av vår likning må vi gange svarene vi fikk med 2365. Det gir oss

$x = 23650$ og $y = -7095$

Den generelle løsningen blir da

$$\begin{aligned} x &= 23650 + 83n \\ y &= -7095 - 25n \end{aligned}$$

Her er vi kun interessert i positive løsninger så vi setter løsningene større enn 0. Det gir oss

$$\begin{aligned} &x = 23650 + 83n > 0 &\quad\Rightarrow\quad& 83n > -23650 &\quad\Rightarrow\quad& n > -284{,}9 \\ &y = -7095 - 25n > 0 &\quad\Rightarrow\quad& -7095 > 25n &\quad\Rightarrow\quad& n < -283{,}8 \end{aligned}$$

Vi ser at det er en verdier for n som passer og det er -284. Det gir oss

$x = 23650 + 83 \cdot (-284) = 78$
$y = -7095 - 25 \cdot (-284) = 5$

Han kjøpte med andre ord 78 krabber og 5 hummere.

Oppgave 5 (vekt 15 %)

a) Forklar hva som menes med største felles faktor og minste felles multiplum til to tall. Bruk gjerne et enkelt talleksempel i forklaringen din.

Løsning:

La a og b være to heltall. En felles faktor av a og b er et tall som kan går opp både i a og b. Største felles faktor av a og b er den største tall blant alle felles faktorer av a og b. Et felles multiplum av a og b er et tall som både a og b kan går opp i . Minst felles multiplum av a og b er det minste tall blant alle felles multiplumene av a og b.

La oss se på tallene 12 og 18. Det største tallet som både 12 og 18 kan deles på er 6 som dermed er største felles faktor. Det minste tallet som kan deles på 12 og 18 er 36 som dermed er minste felles multiplum.

b) Bruk Euclids algoritme til å finne største felles faktor til tallene 678 og 36. Finn også minste felles multiplum.

Løsning: Vi bruker Euclids algoritme

$678 = 18 \cdot 36 + 30$
$36 = 1 \cdot 30 + 6$
$30 = 5 \cdot 6 + 0$

Største felles faktor er dermed 6.

Vi faktoriserer for å finne minste felles multiplum.

$678 = 2 \cdot 3 \cdot 113$
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Minste felles multiplum blir $MFM = 2 \cdot 3 \cdot 113 \cdot 2 \cdot 3 = 4068$

c) Et tall som består av 6 siffer der de tre første er lik de tre siste, som f.eks. 342342 eller 567567, vil alltid være delelig med tallene 7, 11 og 13. Vi anbefaler at du her sjekker at de to nevnte tallene (342342 og 567567) faktisk er delelig med 7, 11 og 13.

Et tall av denne typen kan alltid deles opp på følgende måte. (Bruker 342342 som eksempel.)

$$342342 \;=\; 342 \cdot (1000 + 1) = 342 \cdot 1001$$

Bruk dette for å forklare at et hvilket som helst sekssifret tall der de tre siste sifrene er lik de tre første sifrene, er delelig på både 7, 11 og 13.

Løsning

Tallet 1001 kan faktoriseres som

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Ser vi på et generelt tall på denne formen $abcabc$ så kan dette skrives som

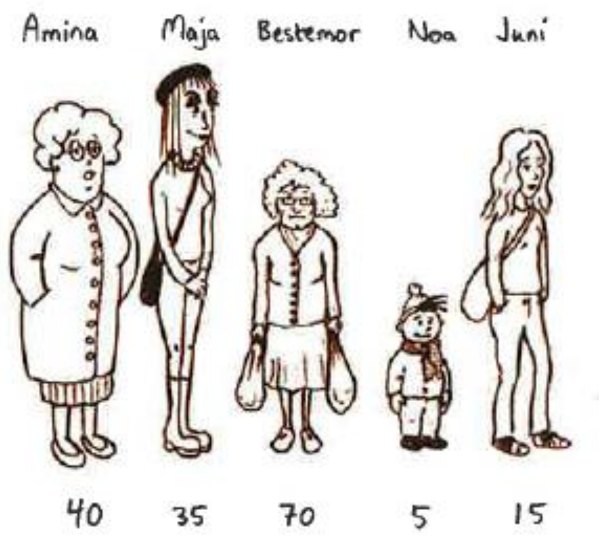
$$abcabc \;=\; abc \cdot (1000 + 1) = abc \cdot 1001$$

Dette tallet er som vi ser delelig på både på 1001 og følgelig kan det også deles på faktorene i 1001 som er $7, 11$ og 13

Oppgave 6 (vekt 12 %)

I boken *Tall og tanke* skriver forfatterne om additive strukturer. (Det som ble tatt opp på forelesningen om temaet, er basert på denne boken.) Denne boken beskriver 3 forskjellige additive strukturer. Det er endring, kombinere/separere og sammenlikning. Dette er en kategorisering av ulike oppgavetyper hvor addisjon inngår.

Betrakt figuren under.



a) Lag to spørsmål fra hver av kategoriene der du bruker informasjonen fra figuren.

Løsning

Her kan det lages mange forskjellige spørsmål. Dette er noen mulig spørsmål.

Endring

Amina er 40 år. Hvor mange år er hun om 5 år?
Hvor mange år var Bestemor for 7 år siden?

Kombinere

Hvor mange år er Noa og Juni til sammen?
Maja og Noa er 40 år til sammen. Hvor mange år er Noa når vi vet at Maja er 35 år?

Sammenlikne

Hvor mange år eldre er Amina enn Maja?
Hvor mange år yngre er Maja sammenliknet med Bestemor?

b) Forklar hvorfor det er viktig å jobbe med oppgaver og problemstillinger innen alle de tre kategoriene. Bruk læreplanen som støtte.

Løsning

I læreplanen står det blant annet at elevene skal kunne (1. og 2. trinn)

Elevene skal utvikle, bruke og samtale om varierte reknestrategiar for addisjon og subtraksjon av tosifra tal og vurdere kor rimelege svara er.

For å nå dette målet er det nødvendig at elevene får jobbe med oppgaver i de ulike kategoriene. Kategorien endring oppfattes ofte som den enkleste og jobber en kun med oppgaver innenfor den kategorien kan elevene fort få vanskeligheter med å håndtere problemstillinger innenfor de andre kategoriene. Som lærere må vi være beviste på å gi oppgaver innenfor de forskjellige kategoriene.

Oppgave 7 (vekt 8 %)

a) Beskriv Anna Sfards 3-trinnsprosess i utviklingen av forståelse av et matematisk begrep, der du bruker subtraksjonsbegrepet som eksempel. Hva vil de si at man har utviklet strukturell forståelse for subtraksjonsbegrepet?

Løsning:

Prosessen består av følgende tre trinn: «Interiorization»-fasen, sammentrekningsfasen (evt. kondensasjonsfasen) og tingliggjøringsfasen (evt. reifikasjonsfasen).

I «interiorization»-fasen lærer man den definisjonen som man senere skal oppnå en strukturell forståelse av. F.eks. hvis det er subtraksjon kvadratrøtter man skal bygge opp en strukturell forståelse av, så lærer man her hva definisjonen på subtraksjon er. Det kan være som hopp bortover tallinjen, f.eks. Man lærer noen eksempler på at hvis man har 10 epler, og man mister 3 epler, da tar man vekk 3 epler fra mengden og teller forfra igjen. Man har her følelsen av at man hele tiden gjør en operasjon på disse tallene, eller at det er en endring som foregår over tid.

Sammentrekningsfasen handler om at man gjentatte ganger går gjennom lengre utregningsprosesser som etter hvert automatiseres. Når det gjelder subtraksjonseksempelet blir man stadig mer vant til den oppstilte metoden for subtraksjon av flersifrede tall og desimaltall. Men innenfor en del tekstoppgaver er man fortsatt usikker på regnearten (f.eks. forståelsen av hvorfor man skal benytte subtraksjon for å finne størrelsen mellom to tall). Man er kanskje fortsatt usikker på subtraksjon av negative tall, og ihvertfall hva forskjellen er mellom *a*–*b* og *b*–a.

Sammentrekningsfasen beskrives som en drillfase, hvor man over en svært lang tidsperiode går gjennom utregning etter utregning etter utregning for å prøve å bygge opp forståelse rundt teorien. Ifølge Anna Sfards artikkel er det mange matematikere som setter seg fast i denne fasen, og som kanskje aldri kommer til siste fase av forståelsen. Poenget med denne fasen er automatiseringen – at man skal slippe å overbelaste arbeidshukommelsen med deler av teorien som på sikt kan automatiseres. Ved å automatisere frigjør man kapasitet i arbeidshukommelsen som kan brukes til å skaffe seg et overblikk over teorien.

I tingliggjøringsfasen får man en a-ha-opplevelse, når man plutselig føler at man har et fullverdig overblikk over hele teorien. Når det gjelder eksempelet med subtraksjon, får man plutselig et klart bilde i hodet hvordan forholdet er mellom de negative og positive tallene, og hvordan det fungerer når man hopper frem og tilbake på tallinjen.

Denne fasen beskrives som et kart med pekere til ulike deler av den detaljerte teorien som man kan hente frem etter behov, og slik at man slipper å ha alle delene av teorien tilgjengelig i arbeidshukommelsen samtidig.

Det å ha en strukturell forståelse av subtraksjonsbegrepet, handler om at man klarer å betrakte subtraksjon som forskjellen mellom to elementer på tallinjen, med eller uten negativt fortegn, og at man samtidig alltid vet når dette skal anvendes i de ulike situasjonene (jfr. Skemps kapittel om begrepsutvikling).