Høgskolen i Telemark

Fakultet for estetiske fag, folkekultur og lærerutdanning

Eksamen MAT 104		BOKMÅL
Emnekode: MAT104		Ordinær eksamen
Tid:	5 timer	Dato: 28.5.2013
Hjelpemidler: Kalkulator, gradeskive og passer		Studiested: Notodden, Porsgrunn og nett
Antall sider:	3 + formelark og utdrag fra LK06	

Oppgave 1 (15 %)

Gitt funksjonen $f(x) = -3x^2 + 6$.

a) Finn nullpunktene til funksjonen.

Løsningsforslag: $-3x^2 + 6 = 0$ gir oss
$3x^2 = 6$
$x^2 = 2$
$x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$

b) Bruk definisjonen på den deriverte til å finne $f'(x)$.

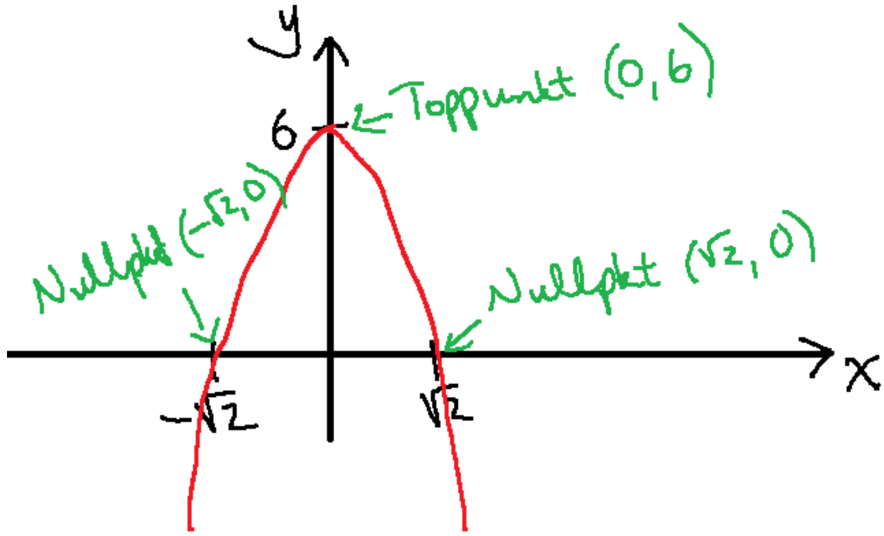
Løsningsforslag: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(-3(x+\Delta x)^2+6\right)-\left(-3x^2+6\right)}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-3\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)+6+3x^2-6}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-3x^2-6x\Delta x-3\Delta x^2+6+3x^2-6}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-6x\Delta x-3\Delta x^2}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} (-6x - 3\Delta x) = -6x.$

c) Bruk den deriverte til å finne x-koordinaten til toppunktet til grafen. Finn også y-koordinaten til toppunktet.

Løsningsforslag: $f'(x) = -6x = 0$ gir oss $x = 0$. *y*-koordinaten til toppunktet blir da $y = f(0) = -3 \cdot 0^2 + 6 = 6$. Toppunktet er altså (0, 6).

d) Tegn en skisse av grafen basert på opplysningene du fant i (a)- og (c)-oppgaven.

Løsningsforslag:



Oppgave 2 (20 %)

Gitt funksjonen $g(x) = -x^3 - 6x^2 + 15x - 5$.

a) Finn $g'(x)$.

Løsningsforslag: $g'(x) = -3x^2 - 12x + 15$

b) Bruk den deriverte til å finne x-koordinaten til topp/bunn-punktene til grafen. Finn også de tilhørende y-koordinatene, og vurder hva som må være toppunkt og hva som må være bunnpunkt.

Løsningsforslag: Setter $g'(x) = -3x^2 - 12x + 15 = 0$. Vi dividerer på begge sider med –3 og får
$x^2 + 4x - 5 = 0$,
hvilket gir oss

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2},$$

hvilket gir oss $x = -5$ og $x = 1$.
De tilhørende y-verdiene blir da $g(-5) = -(-5)^3 - 6 \cdot (-5)^2 + 15 \cdot (-5) - 5 = -105$ og $g(1) = -1^3 - 6 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 - 5 = 3$. Det følger at $(-5, -105)$ er et bunnpunkt og $(1, 3)$ er et toppunkt.

c) Hva er stigningstallet til $g(x)$ når $x = 3$? Finn ligningen til tangenten til grafen når $x = 3$.

Løsningsforslag: $g'(3) = -3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 15 = -48$. Ligningen til tangenten er da på formen $y = -48x + b$. Vi må finne *b*.
Vi vet at når $x = 3$, da er $y = g(3) = -3^3 - 6 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 - 5 = -41$. Dette gir oss ligningen
$-41 = -48 \cdot 3 + b$,
hvilket gir oss løsningen
$b = -41 + 48 \cdot 3 = 103$.
Tangenten er altså gitt ved $y = -48x + 103$.

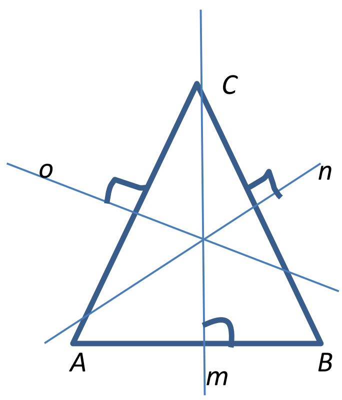
d) Finnes det andre funksjoner $h(x)$ slik at $h'(x) = g'(x)$? Dvs., andre funksjoner som har akkurat samme stigningstall som $g(x)$ har, for alle verdier av *x*? Gi i så fall et eksempel på en slik funksjon.

Løsningsforslag: Alle funksjoner på formen $h(x) = -x^3 - 6x^2 + 15x + c$ der *c* er en hvilken som helst konstant. I disse tilfellene får vi at $h'(x) = -3x^2 - 12x + 15$, som altså er akkurat det samme som $g'(x)$.
Disse funksjonene ser ut som parallellforskyvninger av $g(x)$ oppover eller nedover i koordinatsystemet.

Oppgave 3 (12 %)

a) Bevis at midtnormalene i en trekant skjærer gjennom samme punkt.

Løsningsforslag:

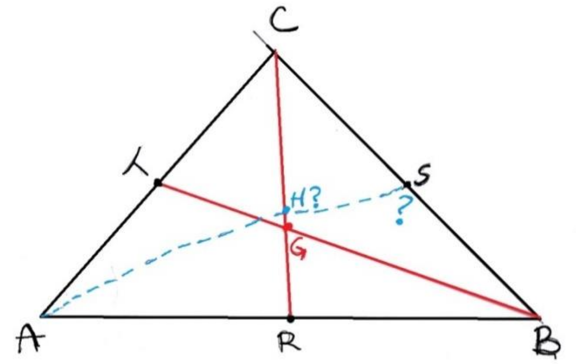


Se figuren. Midtnormalen *m* består av alle punkter som har samme avstand til *A* som til *B*. Tilsvarende består midtnormalen *n* av alle punkter som har samme avstand til *B* som til *C*. Disse skjærer hverandre i et punkt som har samme avstand til *A* som til *B*, og samtidig har samme avstand til *B* som til *C*. Altså er avstanden til *A* den samme som til *C*. Dermed må pr. definisjon dette punktet også ligge på midtnormalen *o*, og *o* går altså gjennom skjæringspunktet til *m* og *n*. Q.E.D.

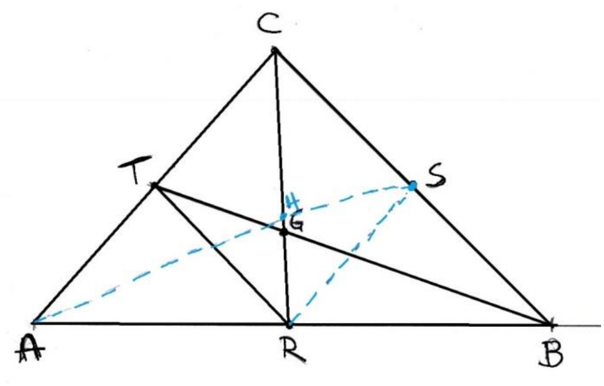
b) Hva er en median i en trekant? Bevis at de tre medianene i en trekant skjærer hverandre i samme punkt.

Løsningsforslag:
Gitt en trekant *ABC* er f.eks. medianen til $\angle A$ linjestykket gjennom *A* som halverer *BC*.

Bevis for at medianene går gjennom samme punkt: Betrakt figuren under. Vi tegner først opp medianene *RC* og *BT*. De skjærer hverandre i punktet *G*. Vi beviser at medianen *AS* også går gjennom *G*.



Strategien er som følger: Vi beviser at $\frac{RG}{GC} = \frac{RH}{HC}$.
Vi finner først $\frac{RG}{GC}$. Se figuren under. Her er $\Delta ART \sim \Delta ABC$, siden $\angle A$ er felles og $\frac{AT}{AC} = \frac{1}{2}$ og $\frac{AR}{AB} = \frac{1}{2}$. Altså er $\frac{TR}{CB} = \frac{1}{2}$. Videre ser vi at $\Delta TRG \sim \Delta BCG$, siden $TR||BC$ og vi dermed må ha $\angle GTR = \angle GBC$ og $\angle TRG = \angle BCG$. Siden $\frac{TR}{BC} = \frac{1}{2}$, er da også $\frac{RG}{GC} = \frac{1}{2}$.



Vi ser nå på $\frac{RH}{HC}$ og beviser at det forholdet også er $\frac{1}{2}$. Vi har at $\Delta RBS \sim \Delta ABC$, siden $\angle B$ er felles og $\frac{RB}{AB} = \frac{1}{2}$ og $\frac{BS}{BC} = \frac{1}{2}$. Altså er $\frac{RS}{AC} = \frac{1}{2}$. Vi ser også at $\Delta RSH \sim \Delta CAH$, siden $RS||AC$ og dermed $\angle HRS = \angle HCA$ og $\angle RSH = \angle CAH$. Det følger da at siden $\frac{RS}{AC} = \frac{1}{2}$, da må også $\frac{RH}{HC} = \frac{1}{2}$.
Altså er $\frac{RH}{HC} = \frac{RG}{GC}$, hvilket var det vi ønsket å bevise. Q.E.D.

Oppgave 5 (20 %)

Vi skal i denne oppgaven se hvilepulsen til norske 30-åringer. En forsker påstår at ut fra hennes forskning er den gjennomsnittlige hvilepulsen til denne gruppen 70 med et standardavvik på 10. Vi antar at hvilepulsen er normalfordelt.

a) Regn ut hva sjansen er for at en tilfeldig person har en hvilepuls på 60 eller mindre.
b) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig person har en hvilepuls på mellom 65 og 80?
c) Siden hvilepulsen er normalfordelt, vil det naturlig nok være noen personer som har lavere hvilepuls enn andre. En forsker fra et annet land sier at 20 % av 30-åringene har en lavere hvilepuls enn 64 i det landet. Finn hva tilsvarende grense er i Norge. (Det vil si du skal finne en grense g som er slik at 20 % har lavere hvilepuls enn denne grensen og 80 % har høyere hvilepuls enn denne grensen)
d) Du har mistanke om at forskeren som påstod at gjennomsnittlig hvilepuls i Norge er 70, tar feil og at hvilepulsen egentlig er lavere enn dette. Du tester 20 personer med følgende resultat:

70	62	65	63	51
45	78	65	70	68
54	58	68	75	71
47	68	76	72	74

Gjennomsnittet her er 65. Regn ut hva sjansen er for å få et stikkprøveresultat på 65 eller lavere. Hvilken konklusjon vil du trekke av dette?

Løsningsforslag:

a) $P(X < 60) = P\left(\frac{X-70}{10} < \frac{60-70}{10}\right) = P(Z < -1) = 0{,}1587$

b) $P(65 < X < 80) = P\left(\frac{65-70}{10} < \frac{X-70}{10} < \frac{80-70}{10}\right) = P(-0{,}5 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z > 0{,}5) = 0{,}5328$

c) $P(X < g) = 0{,}2 = P\left(\frac{X-70}{10} < \frac{g-70}{10}\right) = 0{,}2$

Fra tabellen ser vi at $\frac{g-70}{10} = -0{,}84$ som igjen gir at $g = 61{,}6$.

d) Her må vi bruke sentralgrenseteoremet. Det sier at stikkprøvegjennomsnittet er normalfordelt med forventning på 70 og standardavvik på $\frac{10}{\sqrt{20}}$. Vi får da

$$P(\bar{X} < 65) = P\left(\frac{\bar{X} - 70}{\frac{10}{\sqrt{20}}} < \frac{65 - 70}{\frac{10}{\sqrt{20}}}\right) = P(Z < -2{,}23) = 1 - 0{,}9901 = 0{,}0099$$

Sjansen for å trekke ut en stikkprøve med snitt på 65 eller lavere er med andre ord bare 0,099%. Det betyr at har et godt grunnlag for å påstå at hvilepulsen er lavere enn 70. Vanligvis opererer vi med en 5% grense og vi ligger langt under den.

Oppgave 4 (20 %)

Multiple choice-prøver er en prøve form som er populær en del steder. Dette er en prøveform der du har spørsmål med flere forskjellige svaralternativer der bare et alternativ er riktig. Vi skal se på en prøve som består av 6 spørsmål og der vi har 5 svaralternativer på hvert spørsmål. For å få bestått prøven må minst 5 av 6 spørsmål være riktig besvart. Kari er ikke interessert i å prøve å svare riktig på prøven. Hun bare tipper svarene helt tilfeldig.

a) Hva er sjansen for Kari svarer rett på spørsmål 1?
b) Hva er sjansen for at Kari svarer riktig på 3 av 6 spørsmål?
c) Hva er sjansen for at Kari består prøven?

I klassen til Kari er det til sammen 27 elever. Av disse er 12 jenter og 15 gutter. Læreren skal plukke ut en komite som består av 4 personer. Spørsmålet er hvor stor sjansen er for at det plukkes ut 2 gutter og 2 jenter. Ole løser oppgaven ved å sette det opp slik:

$$P = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{27}{4}} = 0{,}395$$

Dette er helt riktig satt opp, men Ole skjønner ikke noe særlig av hvor formelen kommer fra. Han har bare pugget den.

d) Forklar tankemåten som ligger bak formelen. Formålet er at Ole skal forstå hvordan en kommer frem til formelen.
e) Regn ut sannsynligheten for at det trekkes ut minst 3 jenter til komiteen.

Løsningsforslag:

a) $P = \frac{1}{5}$,
b) $P(3\ av\ 6) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0{,}0819$

c) $P(5) + P(6) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 0{,}0016$

d) Se på det som er skrevet om hypergeometrisk fordeling i notatet til Peer i kompendiet.

e) $P(3) + P(4) = \frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{15}{1}}{\binom{27}{4}} + \frac{\binom{12}{4}\cdot\binom{15}{0}}{\binom{27}{4}} = 0{,}1880 + 0{,}0282 = 0{,}2162$

Oppgave 6 (6 %)

I boken *Sannsynlighetsregning, en fagdidaktisk innføring* er det beskrevet flere ulike spill som kan brukes i undervisningen. Under ser du spillet som er beskrevet i egenaktivitet 4.

Plasser markørene på linjen over start (dvs sifrene 0, 1 og 2 skal dekkes).			
Spillerne fordeler 0, 1 og 2 mellom seg (ved loddtrekning). Finn frem to pengestykker. Rist pengestykkene mellom håndflatene og slipp dem på bordet.			
Dersom kastet ender med 2 krone: flytt 2-markøren en plass frem (uansett hvilken deltaker som rister pengestykket) 1 krone: flytt 1-markøren en plass frem 0 krone: flytt 0-markøren en plass frem			
Fortsett til en vinner er kåret.	**0**	**1**	**2**

Dette er et spill som kan brukes i forbindelse med arbeidet i sannsynlighetsregning. Drøft hvordan spillet kan brukes i en klasse. Ta med litt om hvilket klassetrinn det passer for og hva en kan oppnå med å bruke spillet.

Løsningsforslag: (kortform)

Dette passer typisk på 6. eller 7. trinn. En typisk feil som elever gjør med slike oppgaver er at de tenker at det er lik sjanse for alle tre mulighetene og at det ikke spiller noe rolle om de velger 0, 1 eller 2. Et slikt spill kan være avsløre denne feiltekningen. Ingen unger liker å tape og kanskje de som har valgt 0 eller 2 blir litt mer interessert i å finne ut hvorfor de taper når de spiller dette spillet.

Oppgave 7 (7 %)

Det finnes mange ulike typer apper i matematikk til nettbrett og smarttelefoner. Ta for deg en app og beskriv denne. Gjør også en vurdering av i hvilken grad appen bidrar til å øke brukerens forståelse av begreper i matematikken. Ta utgangspunkt i læringsteorier og forskning som er gjort på læringsutbyttet av ulike oppgavetyper i skolematematikken.

Løsning: Se egen fil med eksempler på vurdering av matematikkapper.