Høgskolen i Telemark

Fakultet for estetiske fag, folkekultur og lærerutdanning

<table>
<tr><td colspan="2">Eksamen MAT 104</td><td>BOKMÅL</td></tr>
<tr><td colspan="2">Emnekode: MAT104 - løsningsforslag</td><td>Eksamen</td></tr>
<tr><td>Tid:</td><td>5 timer</td><td>Dato: 22.5.2015</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hjelpemidler: Kalkulator, gradeskive, passer og skrivesaker</td><td>Studiested: Notodden, Porsgrunn og nett</td></tr>
<tr><td>Antall sider:</td><td colspan="2">5 + formelark og utdrag fra LK06. Totalt 19 sider</td></tr>
</table>

Oppgave 1 (15 %)

a) Vi setter $f(x) = 0$

$-2x^2 + 8 = 0$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

b) Vi regner først ut

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Da får vi

$$\frac{-2(x + \Delta x)^2 + 8 - (-2x^2 + 8)}{\Delta x}$$

$$\frac{-2(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 8 + 2x^2 - 8}{\Delta x}$$

$$\frac{-2x^2 - 4x\Delta x - 2(\Delta x)^2 + 8 + 2x^2 - 8}{\Delta x}$$

$$\frac{-4x\Delta x - 2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

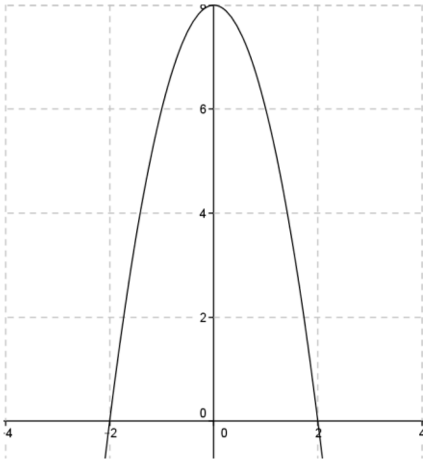
$-4x - 2\Delta x$

Når $\Delta x \to 0$ finner vi den deriverte. I dette tilfellet blir

$f'(x) = -4x$

c) Vi finner toppunktet ved å sette $f'(x) = 0$.

Vi setter $-4x = 0$ som medfører at $x = 0$. Tilhørende y verdi blir 8. Toppunktet har med andre ord koordinatene $(0,8)$



Oppgave 2 (15 %)

a) Den deriverte er

$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$

b) Vi setter $f'(x) = 0$. Det gir oss

$6x^2 - 18x - 24 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \mp \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \mp \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{3 \mp \sqrt{25}}{2} = x = \frac{3 \mp 5}{2}$$

$x = -1$ eller $x = 4$

Vi finner de tilhørende y verdiene

$x = -1 \rightarrow y = 2 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 - 24 \cdot (-1) + 12 = 25$

$x = 3 \rightarrow y = 2 \cdot 4^3 - 9 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 12 = -100$

Det medfører at vi har et toppunkt i punktet $(-1, 25)$ og et bunnpunkt i punktet $(4, -100)$

c) Vi setter $x = -2$ inn i den deriverte. Det gir oss

$f'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - 18 \cdot (-2) - 24 = 36$

Tangenten har er en rett linje og kan derfor skrives på formen

$y = ax + b$

Her vet vi at $a = 36$. Det gir

$y = 36x + b$

Vi må bestemme b. Vi må først finne et punkt på linjen. Vi setter $x = -2$ inn i funksjonen for å finne tilhørende y verdi

$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 9 \cdot (-2)^2 - 24 \cdot (-2) + 12 = 8$

Med andre ord, tangenten går gjennom punktet $(-2,8)$

Da får vi

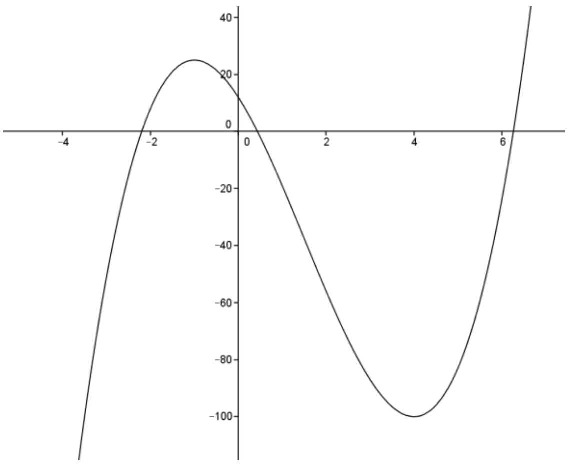
$8 = 36 \cdot (-2) + b$

$b = 80$

Linjen til tangenten blir derfor

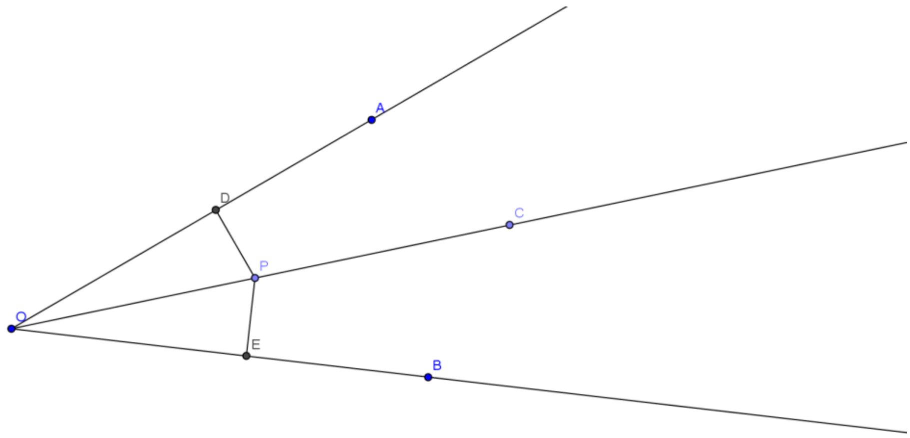
$y = 36x + 80$

Det er ikke bedt om å skissere grafen, men vi tar med en tegning fra GeoGebra som er vist på neste side.



Oppgave 3 (15 %)

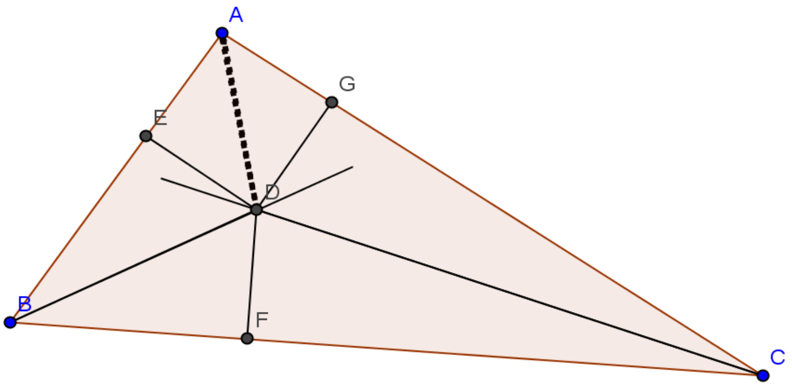
a) Bevis at alle punkter på halveringslinjen til en vinkel, ligger like langt fra begge vinkelbeina.



Bevis: Vi føste tegner en vinkel $\angle AOB$, og finner halveringslinjen OC. For å bevise at alle punkter på halveringslinjen ligger like langt fra begge vinkelbeina, trenger vi bare å bevise at et tilfeldig punkt på halveringslinjen ligger like langt fra begge vinkelbeina. Nå velger vi et tilfeldig punkt P på halveringslinjen OC. Avstanden fra P til begge vinkelbeina er gitt av PD og PE, normaler fra P til vinkelbeina. Nå trenger vi å bare bevise at $PD = PE$.

Vi vet at $\angle DOP = \angle EOP$, siden OC er halveringslinjen til vinkelen. Itillegg har vi $\angle ODP = \angle OEP = 90°$. Siden vinkelsummen i en trekant er $180°$, da $\angle OPD = 180° - \angle ODP - \angle DOP = 90° - \angle DOP$. På den samme måten har vi $\angle OPE = 90° - \angle EOP$. Derfor vi har også $\angle OPD = \angle OPE$. Pluss vi vet at PO er felles side, så $\Delta OPD \cong \Delta OPE$ på grunn av vinkel –side-vinkel postulatet. Som konsekvensen vet vi at $PD = PE$.

b) Bevis at de tre halveringslinjene i en trekant skjærer hverandre i samme punkt. Kan du fortelle hva som er spesielt med det punktet?



Bevis: Vi tegner først en trekant ΔABC.

For å bevise at alle tre halveringslinjene i ΔABC skjærer hverandre i samme punkt, kan vi finner først to halveringslinjer BD og CD i trekant, og finner skjæringspunktet D til dem, og beviser at de tredje halveringslinjen går gjennom D også, dvs, vi trenger bare å bevise at AD er halveringslinjen til vinkel $\angle BAC$. Vi laget normalen fra D til tre sidene i den trekanten, se figuren. Vi vet at alle punktene på en halveringslinjen ligger like langt fra begge vinkelbeina. Derfor $DE = DF, DF = DG$. Itillegg vet vi at DE står rett på AB og DG står rett på AC, dvs $\angle AED = \angle AGD = 90°$. Men $AD = AD$ som felles side, så vi har $\Delta AED \cong \Delta AGD$ ved å bruke side-side-vinkel postulatet. Da har vi $\angle EAD = \angle GAD$, dvs. AD er halveringslinjen til vinkel $\angle BAC$. Nå har vi bevist at alle tre halveringslinjen går gjennom D.

Punktet D er sentrum i den innskrevne sirkelen.

Oppgave 4 (20 %)

$a)\ P(X > 156) = P\left(\frac{X - 150}{5} > \frac{156 - 150}{5}\right) = P(Z > 1{,}2) = 1 - 0{,}8849 = 0{,}1151$

b) $P(145 < X < 160) = P\left(\frac{145-150}{5} < \frac{X-150}{5} < \frac{160-150}{5}\right) = P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z > 1) = 0{,}8185$

c) $P(\bar{X} < 147) = P\left(\frac{\bar{X}-150}{\frac{5}{\sqrt{10}}} < \frac{147-150}{\frac{5}{\sqrt{10}}}\right) = P(Z < -1{,}89) = 1 - 0{,}9706 = 0{,}0294$

Sjansen for å trekke ut en stikkprøve med snitt på 147 eller lavere er med andre ord bare 2,94%. Det betyr at har et godt grunnlag for å påstå at veier mindre enn det de bør gjøre. Vanligvis opererer vi med en 5% grense.

Merknad. Noen fikk utlevert en eksamensoppgave med samme tekst bare at en skulle regne ut sjansen for å få et stikkprøvegjennomsnitt på 146 eller lavere. Utregningene er som over, bare at svaret blir 0,0059 eller 0,59%. Konklusjonen blir som for 147.

d) $P(\bar{X} < g) = P\left(\frac{\bar{X}-150}{\frac{5}{\sqrt{10}}} < \frac{g-150}{\frac{5}{\sqrt{10}}}\right) = P\left(Z < \frac{g-150}{\frac{5}{\sqrt{10}}}\right) = 0{,}05$

Fra tabellen ser vi at $\frac{g-150}{\frac{5}{\sqrt{10}}} = -1{,}645$ som igjen gir at $g = -1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} + 150 = 147{,}4$

Merknad. Vi finner egentlig ikke 1,645 i tabellen. Når vi går inn og leter etter 0,95 ser vi at 1,64 og 1,65 ligger like over og like under. Vi bruker derfor vanligvis 1,645 som verdi. På prøven vil dere selvsagt få full uttelling om dere har brukt 1,64 eller 1,65.

Oppgave 5 (20 %)

a) $P(SS) = \frac{\binom{30}{2}\cdot\binom{35}{0}}{\binom{65}{2}} = 0{,}21$ Alternativt: $P(SS) = \frac{30}{65}\cdot\frac{29}{64} = 0{,}21$

b) $P(minst\ en\ squash) = \frac{\binom{30}{2}\cdot\binom{35}{0}}{\binom{65}{2}} + \frac{\binom{35}{1}\cdot\binom{30}{1}}{\binom{65}{2}} = 0{,}71$

Alternativt: $P(minst\ en\ squash) = 1 - \frac{35}{65}\cdot\frac{34}{64} = 0{,}71$

c) $P(3A2S) = \frac{\binom{35}{3}\cdot\binom{30}{2}}{\binom{65}{5}} = 0{,}34$

d) $P(2\ frø\ spirer) = \binom{3}{2}\cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}38$

d) $P(15\ frø\ spirer) = \binom{20}{15}\cdot 0{,}8^{15} \cdot 0{,}2^5 = 0{,}17$

Oppgave 6 (15 %)

a) Vanskelig å lage fasit på denne, da det kan variere hvilke aktiviteter dere velger.

b) Det er f. eks mulig å lage magiske vegger med de fire regneartene. Der kan en ha selve regnestykket med en farge og svaret med den andre, slik at når de drar stykket gjennom veggen så kommer svaret frem. Omgjøring mellom enheter innen måling kan også være en situasjon der en kan lage magisk vegg. Det er også mange andre situasjoner der en kan jobbe med magiske vegger.

c) Her kan en skrive masse. Her er noen stikkord som er kan nevnes. En fare med en slik magisk vegg er det bare blir drill. Men det er også mulig å utnytte dette uten at det blir drillpreget. En kan f. eks ta frem en elevgruppe som diskuterer regnestykkene og når de er enig om et svar kan de dra tallet/oppgaven gjennom veggen og se om de har tenkt riktig. Det er også enkelt å tilpasse en vegg til det nivået en har på elevgruppen. En ulempe med bruk av moderne teknologi er at teknologien tar vekk fokuset fra det rent faglige.

Merkand. Det må presiseres i en slik oppgave at dere ikke nødvendigvis trenger å ta med akkurat de poengene vi nevner. Det viktigste her er at det kommer med noen begrunnende meninger om dette. Oppgaven teller totalt sett 5% Det betyr at forventet arbeidsmengde på en slik oppgave er ca. 15 minutter og at en halv til en side kan passende omfang.

Standard normalfordeling

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Formelark MAT104

Kvadratsetningene

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Andregradslikning

Likningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsningene $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ettpunktsformelen for en lineær funksjon med stigningstall a

$y = a(x - x_1) + y_1$

Derivasjon

DEFINISJONEN PÅ DEN DERIVERTE:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

FORMEL FOR DEN DERIVERTE:

Hvis $f(x) = x^n$, da er $f'(x) = nx^{n-1}$.

Normalfordeling

Noen setninger om normalfordeling. Hvis Z er $N(0,1)$ og a og b er to positive tall der $b > a$, da er

$P(Z = a) = 0$
$P(Z < a) = P(Z \leq a)$
$P(Z > a) = 1 - P(Z < a)$
$P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$
$P(Z > -a) = P(Z < a)$
$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$
$P(-a < Z < b) = P(Z < b) + P(Z < a) - 1$
$P(-a < Z < a) = 2 \cdot P(Z < a) - 1$