Løsningsforslag til i MAT104 vår 2016

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x) = x^2 - 4x$.

a) Finn nullpunktene til funksjonen.

Løsning: $x^2 - 4x = 0$ gir oss $x(x-4) = 0$, og dermed $x = 0$ eller $x = 4$.
Nullpunktene er altså $(0, 0)$ og $(4, 0)$.

b) Bruk definisjonen på den deriverte for å finne $f'(x)$.

Løsning: Definisjonen er

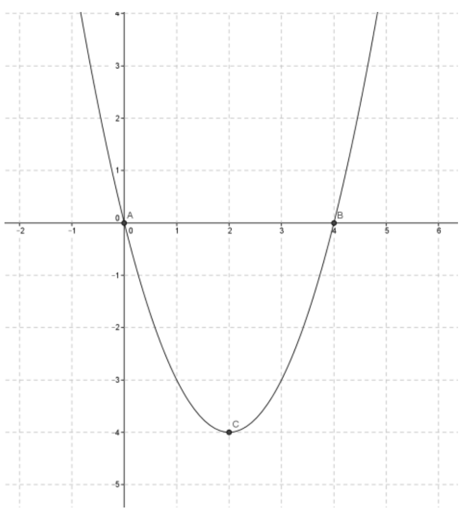
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) - (x^2 - 4x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 4x - 4\Delta x - x^2 + 4x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x - 4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x - 4 + \Delta x) = 2x - 4$$

c) Bruk den deriverte til å finne x-koordinaten til bunnpunktet til grafen. Finn også y-koordinaten til bunnpunktet.

Løsning: Vi setter $f'(x) = 2x - 4 = 0$. Vi får da $x = 2$.
y-koordinaten er $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$.

d) Tegn en skisse av grafen basert på opplysningene du fant i (a)- og (c)-oppgaven.



Oppgave 2 (10 %)

Gitt funksjonen $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 5$.

a) Finn $g'(x)$.

Løsning: $g'(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 9 = 3x^2 + 6x - 9$.

b) Bruk den deriverte til å finne x-koordinaten til topp/bunn-punktene til grafen. Finn også de tilhørende y-koordinatene, og vurder hva som må være toppunkt og hva som må være bunnpunkt.

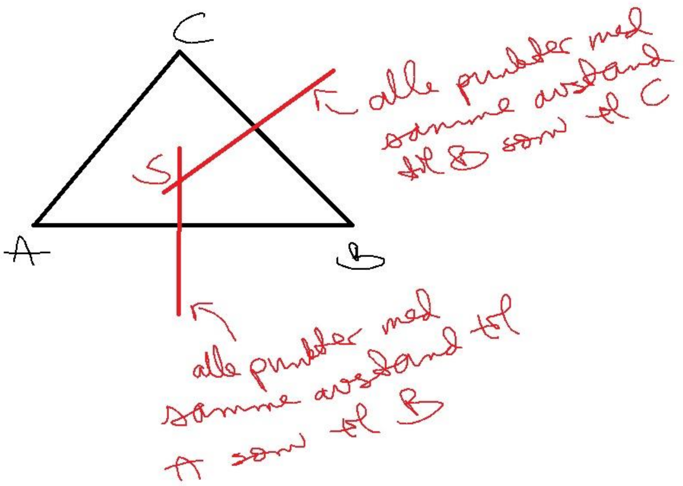
Løsning:

Vi setter $g'(x) = 0$ og får $g'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0$. Vi deler med 3 på venstre og høyre side og får $x^2 + 2x - 3 = 0$. Vi bruker andregradsformelen og får $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$, hvilket gir oss $x = -3$ og $x = 1$. y-koordinatene er $f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 5 = 22$ og $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 - 5 = -10$.

Punktet $(-3, 22)$ må være et toppunkt, siden y-koordinaten her er større enn for det andre punktet. Punktet $(1, -10)$ er dermed et bunnpunkt.

Oppgave 3 (15 %)

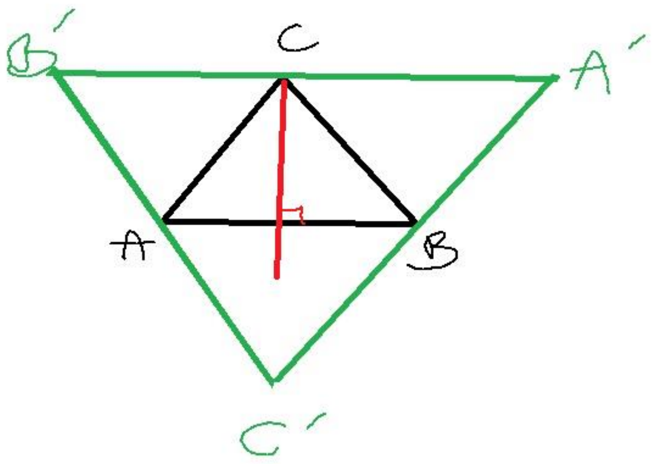
a) Se figuren under:



Midtnormalen til *AB* er definert som mengden punkter med samme avstand til *A* som til *B*, og tilsvarende er midtnormalen til *BC* definert som mengden punkter med samme avstand til *B* som til *C*. Disse skjærer hverandre i et punkt, *S*, som har samme avstand til *A* som til *B* som til *C*. Dermed må *S* også ligge på midtnormalen til *AC*, og dermed går alle tre midtnormalene gjennom samme punkt, *S*.

Hvis vi lar *S* være sentrum i en sirkel med radius *AS*, må sirkelen også gå gjennom *B* og *C* siden vi nettopp har bevist at *AS* = *BS* = *CS*. Altså har vi nå fått den omskrevne sirkelen til trekanten, og sentrum er *S*.

b) Vi starter med å konstruere parallelltrekanten, hvilket er trekanten med sider parallelle med sidene i ΔABC, som vist på figuren under:



Målet med beviset er å vise at høydene i ΔABC er midtnormaler i $\Delta A'B'C'$, og resultatet vil da følge fra det vi beviste i a)-oppgaven.

Det holder å bevise at høyden gjennom *C* er midtnormal til *A'B'* (se figuren). Beviset er helt identisk for de to andre høydene.

Vi må vise at høyden gjennom *C* står 90° på *A'B'*, og at *C* har samme avstand til *B'* som til *A'*.

Det er klart at den står 90° på *A'B'*, siden *A'B'* er parallell med *AB* og høyden selvsagt står 90° på *AB*.

Vi viser nå at *B'C* = *CA'*. Vi gjør dette ved å bevise at $\Delta ACB' \cong \Delta BA'C$. Vi gjør dette ved å bevise at $\Delta ACB' \cong \Delta CAB$, og at $\Delta ABC \cong \Delta A'CB$.

Vi har at $\Delta ACB' \cong \Delta CAB$ fordi *AC* er felles; og $\angle CAB'$ er samsvarende med $\angle ACB$ (i og med at $AB' \parallel BC$ og *AC* er felles), og $\angle B'CA$ er samsvarende med $\angle BAC$ (i og med at $B'C \parallel AB$ og *AC* er felles).

Vi har at $\Delta ABC \cong \Delta A'CB$ fordi BC er felles; og $\angle BCA'$ er samsvarende med $\angle CBA$ (i og med at $AB \parallel CA'$ og BC er felles), og $\angle A'BC$ er samsvarende med $\angle ACB$ (i og med at $AC \parallel BA'$ og BC er felles).

Det følger altså nå at $\Delta ACB' \cong \Delta BA'C$, og dermed at $B'C = CA'$, og dermed at høyden gjennom C er midtnormal til $A'B'$. Q.E.D.

Oppgave 4 (25%)

a) $P(X < 385) = P\left(\frac{X-400}{20} < \frac{385-400}{20}\right) = P(Z < -0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

b) $P(390 < X < 420) = P\left(\frac{390-400}{20} < \frac{X-400}{20} < \frac{420-400}{20}\right) = P(-0{,}5 < Z < 1) =$
$P(Z < 1) - P(Z > 0{,}5) = 0{,}5328$

c) Her ser vi først på situasjonen med for tunge poser. Har vi først funnet den er den andre enkel å finne siden kurven er symmetrisk om gjennomsnittet. Grensen vi søker er

$$P(X > g_2) = 0{,}1$$

Dette er det samme som

$$P(X < g_2) = 0{,}9$$

Det gir oss

$$P(X < g_2) = P\left(\frac{X - 400}{20} < \frac{g_2 - 400}{20}\right) = 0{,}9$$

Fra tabellen ser vi at $\frac{g_2-400}{20} = 1{,}28$ som igjen gir at $g_2 = 425{,}6$.
Med andre ord er grensen 25,6 over gjennomsnittet. Den nedre grensen som det også spørres etter er da gitt ved

$$g_1 = 400 - 25{,}6 = 374{,}4$$

På godt norsk betyr det at alle godteposene som veier mindre enn 374,4 gram eller mer enn 425,6 gram må pakkes om på nytt.

d) Her må vi bruke sentralgrenseteoremet. Det sier at stikkprøvegjennomsnittet er normalfordelt med forventning på 400 og standardavvik på $\frac{20}{\sqrt{15}}$. Vi får da

$$P(\bar{X} < 390) = P\left(\frac{\bar{X} - 400}{\frac{20}{\sqrt{15}}} < \frac{390 - 400}{\frac{20}{\sqrt{15}}}\right) = P(Z < -1{,}94) = 1 - 0{,}9738$$

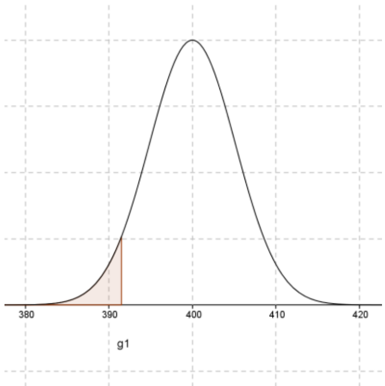
$$= 0{,}0262$$

Sjansen for å trekke ut en stikkprøve med snitt på 390 eller mindre er med andre ord bare 2,62%. Det betyr at har et godt grunnlag for å påstå at godteposene inneholder for lite godter. Vanligvis opererer vi med en 5% grense og vi er godt under denne.

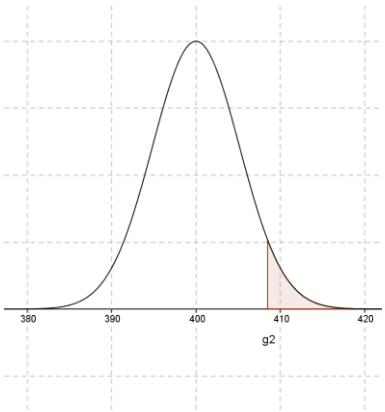
e) Vi skal finne grensen som er angitt i uttrykket

$$P(\bar{X} < g_1) = 0{,}05$$

Vi kan illustrere dette grafisk



Her har vi en situasjon der det er enklere å finne tilsvarende grense på høyresiden og deretter utnytte symmetrien. Vi prøver derfor heller å finne grensen g_2 i figuren under.



$$P(X > g_2) = 0{,}05$$

Dette er det samme som

$$P(X < g_2) = 0{,}96$$

Det gir oss

$$P(X < g_2) = P\left(\frac{X-400}{\frac{20}{\sqrt{15}}} < \frac{g_2-400}{\frac{20}{\sqrt{15}}}\right) = 0{,}95$$

Dette gir oss videre at

$$P\left(Z < \frac{g_2-400}{\frac{20}{\sqrt{15}}}\right) = 0{,}95$$

Fra tabellen ser vi at $\frac{g_2-400}{\frac{20}{\sqrt{15}}} = 1{,}645$ som igjen gir at $g_2 = 408{,}5$.

Med andre ord er grensen 8,5 over gjennomsnittet. Den nedre grensen som det også spørres etter er da gitt ved

$$g_1 = 400 - 8{,}5 = 391{,}5$$

På godt norsk betyr det at dersom stikkprøvegjennomsnittet er under 391,5 så er det grunn til å mistenke at posene inneholder for lite godter.

Oppgave 5 (20%)

a) Vi ser på sjansen for henholdsvis 0 og 1 sekser.

$$\mathrm{P}(X=0) = \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} = 0{,}4019$$

$$\mathrm{P}(X=1) = \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776} = 0{,}4019$$

Sjansen er med andre ord like stor for 0 seksere og 1 sekser

b) $\mathrm{P}(X=3) = \binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0{,}1550$

c) $P(SA) = \frac{\binom{15}{1} \cdot \binom{25}{1}}{\binom{40}{2}} = 0{,}4808$

d) $P(SA) = \frac{\binom{15}{3} \cdot \binom{25}{3}}{\binom{40}{6}} = 0{,}2726$

e) Lille Ole tenker feil. Han har brukt en binomisk modell. Her legger vi ikke tilbake dropsene og da vil sannsynligheten være forandret etter at vi har trukket ut en drops. For å bruke binomisk modell må sannsynligheten være konstant.

Oppgave 6 (7%)

Her kan det skrives mye og det forventes naturlignok ikke at dere kommer inn på alle momenter i forbindelse med bruk av interaktive tavler.

Noen fordeler som kan nevens med bruk av interaktive tavler er følgende. Dere må ikke nødvendigvis ha kommet inn på akkurat disse punktene. Det viktigste er at dere kan si noe om fordelene med interaktive tavler.

- Du kan enkelt variere med bruk av farger.
- Du har masse innebyggede figurer som du kan bruke. Disse kan også behandles ved å speilvende dem, rotere dem, forminske, forstørre etc. Dette kan brukes til å illustrere forskjellige setninger i geometrien, f. eks areal av trekant.
- Du har mange forskjellige penner du kan bruke. Her kan nevnes magisk penn, merkepenn, tegnestifter mm.
- Du trenger ikke å viske av en en interaktive tavle. Er tavlen fylt ut tar du bare et nytt ark. Dette har sin fordel at du lett kan hente frem ting du har gjort tidligere i timen.
- Notebook har mange innebyggede maler som kan brukes til å lage spennende interaktive opplegg for elevene.

Det er selvsagt ikke bare fordeler med interaktive tavler. Det beste i klasserommet er en kombinasjon med vanlig klassisk tavle og interaktive tavle. En utfordring med interaktive tavle er at skjermen er ganske liten. Spesielt på de lavere trinnene ønsker en som lærer ofte å skrive ting på tavlen i et hjørne som skal stå der hele uken. Det kan være ting som ukens øvingsord i norsk, gangestykker i matematikk, hvem som er ordensbarn etc. Dette er vanskeligere å få til på en liten interaktive skjerm. Det har også tradisjonelt vært noe mer krevende å skrive på en interaktive tavle sammenliknet med grønntavle. De nyeste tavlene er imidlertid blitt veldig gode så dette er ikke så stort problem lenger.

Oppgave 7 (8%)

<u>Alt. 1</u>

Noen fordeler som kan nevnes med omvendt undervisning

- Elevene kan se på videoe i fred og ro og i sitt eget tempo. I klasserommet er de prisgitt lærerens tempo som ikke passer alle.
- Tiden i klasserommet kan brukes mer effektivt til blant annet oppgavearbeid og diskusjon/refleksjon
- Elevene er bedre forberedt til timene enn de ville vært ellers.
- Elevene kan få en gjennomgang av fagstoff selv om læreren er syk.
- Elever som er syk kan i en del situasjoner likevel få sett videoer og få et faglig utbytte selv om de ikke kan være på skolen.
- Videoer kan brukes som repetisjon før prøver/eksamen.
- Når videoer først er laget kan de gjenbrukes på andre grupper

Noen ulemper med omvendt undervisning

Ofte har folk en tendens til kun å trekke frem alle positive sider med omvendt undervisning, men det er ulemper også som er verdt å tenke på. Her er noen stikkord.

- Ikke alle tema egner seg like godt for omvendt undervisning og der bør det heller ikke brukes.
- Elevene kan bli lei om alt presenteres gjennom videoer og dermed ikke bruke nødvendig tid til å jobbe med dem. Det kan redusere læringen.

<u>Alt. 2</u>

Vanskelig å lage fasit på denne, da det kan variere hvilke aktiviteter og app’er dere velger.