

EKSAMENSFORSIDE

Skriftlig eksamen med tilsyn

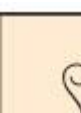
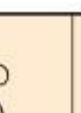
Emnekode: MG1MA1 - Løsningsforslag	Emnenavn: Matematikk 1 emne 1	
Dato: 28.05.2018	Tid fra / til: 9.00-15.00	Ant. timer: 6
Ansv. faglærer: Peer Andersen/Beate Haugom Bigseth/Svend Eidsten		
Campus: Drammen	Fakultet: HIU	
Antall oppgaver: 7	Antall vedlegg: 1	Ant. sider inkl. forside og vedlegg: 22
Tillatte hjelpemidler (jfr. emnebeskrivelse): Tegne og skrivesaker, kalkulator og åtte enkelt sider med notater.		
Opplysninger om vedlegg: Matematikkdelen av LK06 er lagt ved som vedlegg		
Merknader: NB. Alle svar skal begrunnes. Vis utregningene. Alle delspørsmål innenfor hver oppgave har lik vekt.		

Kryss av for type eksamenspapir	
Ruter ☒	Linjer ☐

Oppgave 1 (vekt 20 %)

- a) I gamle Egypt brukte de det vi kaller et additivt tallsystem. Forklar kort prinsippet for hvordan et additivt tallsystem er bygget opp. Forklar også hvordan posisjonssystemet er bygget opp.

I Egypternes tallsystem brukte de følgende symboler

						
1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

Skriv tallet 20324 med Egypternes symboler.

Løsning

Et additivt tallsystem kjennetegnes først og fremst ved at vi legger sammen verdiene til symbolene. Rekkefølgen de står i har heller ikke noe å si. Tallene nnn IIIII og IIIII nnn betyr begge det samme, altså 35. I et posisjonssystem har derimot plasseringen til sifferet betydning for hvilket tall vi har. Hvis vi ser f. eks på tallet 243 så angir 2 tallet hvor mange hundre vi har, 4 tallet antall tiere og 3 tallet antall enere. Rekkefølgen sifrene står i har betydning for hvilket tall vi har. Tallet 43 er ikke det samme som 34. Tallet 20324 kan vi skrive slik med egypternes symboler

$$20324 = \text{nn} \text{ee} \text{ee} \text{nn} \text{IIII}$$

- b) Gjør om tallene til det angitte tallsystemet

- i) $647_{\text{atte}} = \quad ti$
 ii) $431_{ti} = \quad \text{atte}$

Løsning:

- i) $647_{\text{atte}} = 6 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 7 = 423$
 ii) $431_{ti} = 6 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 7 = 657_{\text{atte}}$

c) Regn ut i det angitte tallsystemet

- i) $454_{seks} + 303_{seks} =$
- ii) $3002_{fem} - 1214_{fem} =$
- iii) $44_{\text{\textit{\text{\textit{\textit{\textit{}}}}}} \cdot 53_{\text{}} =$

Løsning:

- i) $454_{seks} + 303_{seks} = 1201_{seks}$
- ii) $3002_{fem} - 1214_{fem} = 1233_{fem}$

- iii) Under er utregningen på gangestykket vist. Dette er regnet i åttetallsystemet, men jeg har tatt indeksene vekk da det ble så rotete hvis jeg tok dem med. (Strekene kom over indeksene.)

$$\begin{array}{r} 44 \cdot 53 \\ 254 \\ \underline{254} \\ 3014 \end{array}$$

I figuren under ser du et utdrag fra kladdeboken til Lille Ole

$$\begin{array}{r} \overset{10}{3} \overset{10}{2} 4 \\ - 156 \\ \hline \underline{\underline{168}} \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{10}{6} \overset{10}{2} 5 \\ - 252 \\ \hline \underline{\underline{36^{13}}} \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{10}{8} \overset{10}{4} 6 \\ - 224 \\ \hline \underline{\underline{5112}} \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{10}{7} \overset{10}{6} 3 \\ - 218 \\ \hline \underline{\underline{4145}} \end{array}$$

- d) Forklar hva Lille Ole har tenkt. Hvordan kan du hjelpe Lille Ole videre i arbeidet med subtraksjon av flersifrede tall?

Løsning

Her virker det som Lille Ole nylig har lært å veksle/låne. Det første stykket der han må veksle inn både en hundrer og en tier gjør han riktig. Det virker som Lille Ole tror han må veksle uansett når han har subtraksjonsstykker. Vi ser på andre stykket så skal han trekke 2 fra 5. Her er det ikke nødvendig å veksle inn, men Lille Ole gjør det likevel. Dette gjør han også på de andre stykkene. Ser vi på svarene på de 3 siste stykkene, så ser vi at de er urimelig store. Jeg ville først tatt en prat med Lille Ole om

disse svarene er rimelige og forhåpentlig vis ser han selv at svarene ikke kan være riktig. Jeg ville deretter brukt f. eks penger som konkretisering for å vise hvordan en kan jobbe med veksling og når det er nødvendig å veksle og når det ikke er nødvendig.

- e) Situasjoner/kategorier innenfor additive og multiplikative strukturer kan eksemplifiseres gjennom regnefortellinger.

Lag en regnefortelling til hver av de tre kategoriene (Endring, kombinere/separere, sammenlikne) innenfor additive strukturer som er beskrevet i Tall og tanke 1. Hvorfor er det viktig at vi som lærere lar elever jobbe med oppgaver innenfor alle tre kategoriene?

Løsning

Her finnes det naturligvis mange forskjellige eksempler. De jeg presenter er et eksempel. Andre eksempler kan være like bra. Det er tre kategorier. Endring, kombinere/separere og sammenlikne. Se også side 148 i Tall og tanke 1.

Endring

Lille Kari har 5 drops. Hun får 3 drops til av pappaen sin. Hvor mange drops har hun til sammen?

Kombinere/separere

Kari har 4 dukker og Oda har 2 dukker. Hvor mange dukker har de til sammen?

Sammenlikne

Ole har 8 fotballer og Tor har 3 fotballer. Hvor mange flere fotballer har Ole enn Tor?

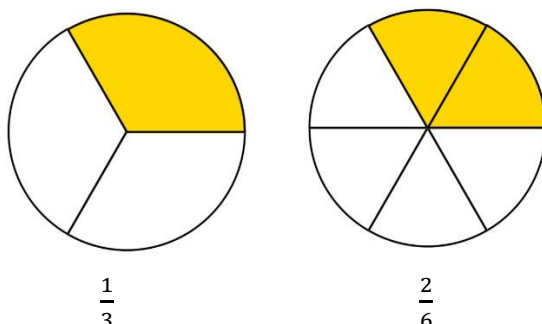
Et mål i læreplanen er at elevene skal kunne «velge regneart og begrunne valget». Det betyr at vi må la elevene møte tekstoppgaver som representerer ulike additive strukturer, slik at de f. eks ikke alltid møter subtraksjon i form av å «ta bort» eller «miste». Det betyr også at vi må ha fokus på hensikten med dette arbeidet: Å analysere oppgaveteksten, forstå hva den spør etter og finne en fornuftig løsning.

Oppgave 2 (vekt 16%).

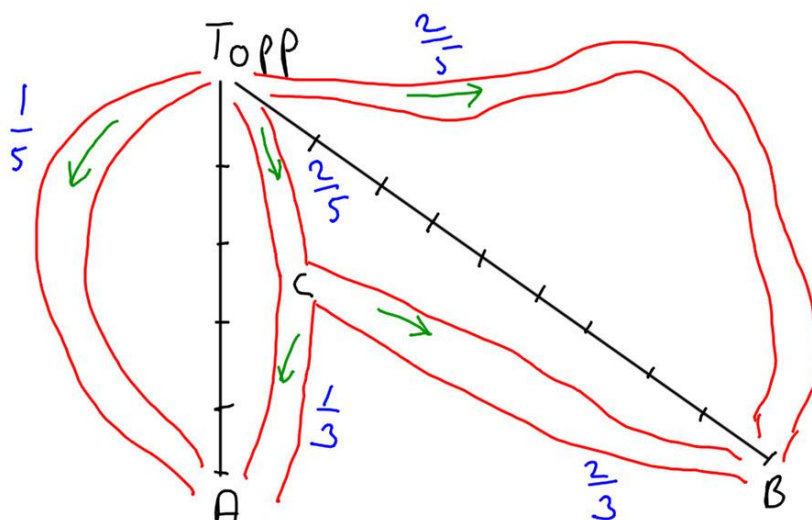
- a) En elev skjønner ikke hvorfor brøkene $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{6}$ er like store. Lag en illustrasjon som viser hvorfor dette er tilfelle, og forklar hvordan du ville forklart dette til eleven.

Løsning

Her kan vi lage en figur som først viser en tredel. Deretter kan vi dele hver av tredelene opp i to. Vi ser da at sirkelen blir delt opp i seks deler. I venstre figur har vi skravert en tredel og i høyre to sjettedeler. Vi ser at det er samme området som er skravert og at brøkene dermed er like store.



- b) I et alpinanlegg er det to skiheiser. En som går fra punkt A til toppen og en som går fra punkt B til toppen. Når en skal kjøre nedover fra toppen er det tre nedfarter som løperne kan velge. Statistikken til alpinanlegget viser at $\frac{1}{5}$ tar løypen til venstre fra toppen til punkt A og $\frac{2}{5}$ tar traseen direkte fra toppen til B. Det viser seg at $\frac{2}{5}$ tar trassen mellom løypene fra toppen mot punkt C. Der deler løypen seg i to og $\frac{1}{3}$ fortsetter mot A og $\frac{2}{3}$ fortsetter mot B. Se figur under. Hvor stor andel av løperne ender på punkt A og hvor stor andel ender på punkt B?



Løsning

Ser vi på antall løpere som havner i punkt A så er det de som tar traseen til venstre samt de som tar den i midten til punkt C og deretter den til venstre. Andelen løpere som havner i A blir derfor:

$$A: \quad \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{3}{15} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Tilsvarende får vi på B.

$$B: \quad \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

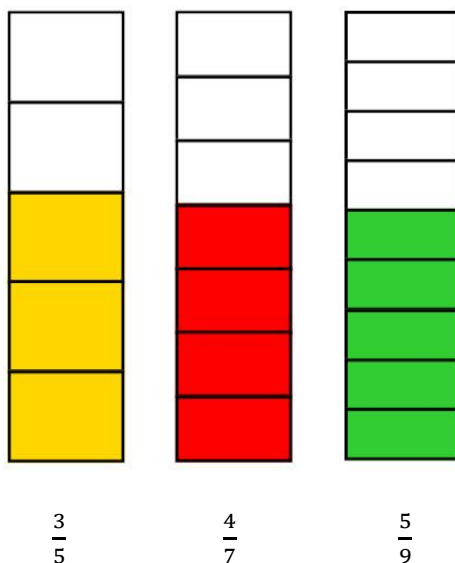
Når vi skal regne ut andelen løpere som havner i punkt B, kunne vi også tenkt som så at de som ikke havner i A, må havne i B, slik at andelen i B blir

$$B: \quad 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

- c) Tre av elevene dine krangler om hvilke av brøkene $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ og $\frac{5}{9}$ som er størst. Lille Kari mener $\frac{3}{5}$ er størst, Lille Ole mener $\frac{4}{7}$ er størst og Lille Truls mener $\frac{5}{9}$ er størst. Hvem av dem har rett? Vis dette med en illustrasjon. Hva tror du årsaken er til at Lille Truls mener at $\frac{5}{9}$ er størst?

Løsning

Vi bruker illustrasjonen under. Det er viktig at rektanglene er like store. Da ser vi hvilken brøk som er størst.



I dette tilfelle ser vi $\frac{3}{5}$ er den figuren der det fargelagte området er størst. Med andre ord er brøken $\frac{3}{5}$ størst av de tre brøkene. At noen tror at $\frac{5}{9}$ er størst henger nok sammen med at den brøken inneholder de største tallene og dermed vil nok noen kunne tro at brøken også er størst.

d) Gjør om tallene fra desimaltall til brøk og forkort mest mulig

i) $0,36$ ii) $0,545454 \dots \dots \dots$

Løsning

i) $0,36 = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$

ii) Her setter vi

$$x = 0,54545454 \dots \dots \dots \quad (1)$$

Vi ganger deretter begge sider med 100 og får

$$100x = 54,54545454 \dots \dots \quad (2)$$

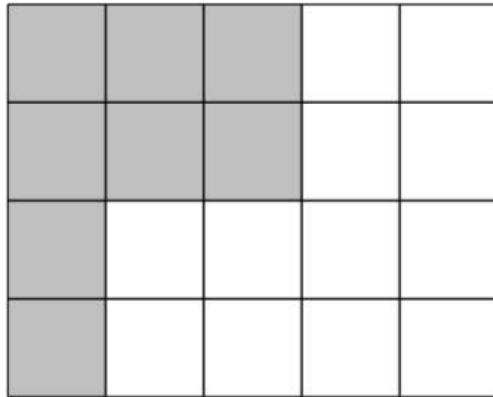
Vi tar (2) minus (1). Det gir oss

$$99x = 54$$

$$x = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$$

Oppgave 3 (vekt 16%).

- a) Følgende oppgave ble gitt til mange 7. klasser i forbindelse med en kartleggingsprøve.



- a) Fortell med et desimaltall hvor stor del av hele rektangelet som er farget grått. (Sett riktig)

- A 8,12
 B 0,4
 C 8,20
 D 0,8

- b) Hvorfor er dette det rette svaret? _____

Løs oppgaven i rammen. Svar både på a) og b)

Løsning

Vi ser at 8 av 20 ruter er farget grå. Det betyr at $\frac{8}{20} = \frac{4}{10}$ av figurene er farget grå. Det er det samme som 0,4 og vi ser at B er rett svar.

- b) Da oppgave i rammen ble gitt til 7. klassene fordelte svarene seg slik. Tallene er gitt i prosent.

8,12:	19%
0,4:	16%
8,20:	35%
0,8:	28%
Ubesvart:	3%

Hvilken tenkning kan ligge bak feilsvarene? Hva kan årsaken være til at så mange elever ikke svarer riktig på oppgaven?

Løsning

De som har svar 8,12 har nok tenkt at det er 8 grå ruter og 12 som ikke er grå. De har ikke skjønnet hvordan de skal skrive dette og har valgt å skrive det som 8,12.

De som har skrevet 0,4 har tenkt riktig og antagelig brukt samme tankegang som vi har vist i spørsmål a)

De som har svar 8,20 har nok tenkt mye det samme som de som har skrevet 8,12. De har tenkt at 8 er grå av til sammen 20 ruter. De har ikke skjønnet hvordan dette skal skrives og brukt de tallene de har, altså 8 og 20 og skrevet det som 8,20.

De som har svart 0,8 har nok sett at det er 8 ruter som er grå. De har tenkt da at dette utgjør 0,8 og ikke tenkt på at det er totalt 20 ruter til sammen og ikke 10.

Det var mange som svarte feil på oppgaven og kun 16% som fant riktig svar. Årsaken ligger nok i en mangelfull forståelse av hvordan desimaltallene er bygget opp. Her bør det jobbes med det grunnleggende om desimaltall med siktemål at elevene skal få en forståelse av hvordan desimaltallene er bygget opp og hva de angir.

- c) Gi et eksempel på en typisk misoppfatninger som elever kan ha om desimaltall. Gi et eksempel på en oppgave som kan avdekke en slik misoppfatning.

Løsning

Det finnes mange misoppfatninger innen desimaltall. Vi ser her på en type misoppfatning, men det er selvsagt også i orden om dere beskriver andre typer misoppfatninger enn den jeg velger. Dere finner for øvrig mye interessant stoff her om dere vil lese mer om dette

<https://home.usn.no/panderse/KIMhefter/kingammeltall.pdf>

En typisk misoppfatning er at elever tror at det tallet med flest desimaler er størst. En elev med denne misoppfatning vil f. eks tro at tallet 0,432 er større enn 0,52. Det er ikke så rart da vi uttaler 0,432 som null komma firehundrede og tretti to og 0,52 som null komma femtito. Skal vi avdekke slike misoppfatninger kan vi gi oppgaver der elevene skal finne det største tallet.

Eksempel på oppgave

Hvilket tall er størst av

0,2365 0,43 0,324

Det er også lurt å gi flere oppgaver slik at en ser at det er mønster og ikke bare en tilfeldig feil eller slurv. Skal en avdekke slike misoppfatninger bør en unngå å gi oppgaver som denne

Eksempel på oppgave

Hvilket tall er størst av

0,6565 0,542 0,32

Her ser vi at det lengste faktisk er størst og de som har en misoppfatning får rett svar selv om de har tenkt feil.

- d) En lærer gav elevene sine en prøve i lille gangetabellen. Totalt var det 60 oppgaver på prøven. Lille Kari fikk til 35 av de 60 oppgavene. Hvor mange prosent av oppgavene klarte Lille Kari? Læreren gir elevene en ny gangeprøve noen måneder senere. Også denne gang består den av 60 oppgaver. Lille Kari klarer denne gang 42 av oppgavene. Hvor mange prosent har Lille Kari forbedret seg fra første til andre prøve?

Løsning

Vi ser Lille Kari har forbedret seg med 7 poeng. For å finne hvor mange prosent hun har forbedret seg ser vi på hvor mye dette utgjør i forhold til 35 poeng

$$\frac{7}{35} \cdot 100\% = \frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%$$

Vi ser at Lille Kari har forbedret seg med 20%.

Oppgave 4 (vekt 20%)

- a) Svar på begge oppgavene under
- i. Forklar begrepet retorisk algebra.

Løsning:

Retorisk algebra kjennetegnes ved at en bruker sitt dagligspråk for å uttrykke de matematiske sammenhengene og ukjente størrelser, ikke bokstaver eller symboler. Eksempler her kan være: «Arealet av en trekant er grunnlinjen multiplisert med høyden delt på to» og «En størrelse og en fjerdedel av den blir 15. Hva er størrelsen?»

- ii. Forklar hvorfor dette stadiet av algebra er viktig for elevers forståelse av symbolsk algebra.

Løsning:

Det er viktig med systematisk brobygging fra det konkrete til det abstrakte. Det retoriske språket som gir symbolspråket mening, vil kunne hjelpe eleven i denne overgangen. At elevene kan bruke sitt eget språk til å forklare matematiske problemer, som etter hvert kan generaliseres ved hjelp av bokstaver. Geometriske figurer med formler for utregninger av areal og volum, er fine eksempler på en naturlig overgang mellom retorisk og symbolsk algebra.

Undervisningen i matematikk må legges til rette slik at elevene får utvikle mentale bilder som støtte til abstraheringen i faget. Med mentale bilder og en retorisk tilnærming til algebra, vil overgangen fra det konkrete til det abstrakte skje på en naturlig måte.

b) Svar på begge oppgavene under

- i. Hvordan vil du som matematikklærer planlegge elevers første møte med likninger? Begrunn svaret.
- ii. Hvordan vil du forklare viktigheten av elevers forståelse av likhetstegnet i arbeidet med likninger?

Løsning på I og II:

Først og fremst er det avgjørende at elevene har god forståelse av likhetstegnet som et ekvivalenstegn. At elevene har den relasjonelle forståelsen av likhetstegnet, hvilket betyr at de forstår at venstre side skal ha nøyaktig *lik verdi* som høyre side av likhetstegnet. Oppgaver som går ut på at elever skal fylle inn en blank rute for at en tallsetning skal stemme, er en fin måte å kartlegge elevers forståelse av likhetstegnet på. Eks her er:
 $8 + 4 = \square + 5$

Bruken av vektskåler er en fin tilnærming til likninger. Dette visualiserer betydningen av likhetstegnet, og forståelsen for likevekt er avgjørende for at vektskålene skal ha lik tyngde. Her bør man få elevene til å tenke på venstre vektskål som venstre side av likhetstegnet og høyre vektskål som høyre side av likhetstegnet. Stanga i midten av skålene er der likhetstegnet befinner seg i likningen. Det kan være en utfordring å finne helt nøyaktige vektskåler på en skole, men det finnes en rekke digitale programmer som kan brukes her. For eksempel <https://www.mathsisfun.com/algebra/add-subtract-balance.html> Her legger man til og fjerner mynter (positive tall), ballonger (negative tall) og x-er, til man sitter igjen med én x i den ene vektskålen og et visst antall mynter/ballonger i den andre. Dragonbox er en app, som fint viser hvordan noe med motsatt verdi eliminerer et tall eller en bokstav, noe som også er en fin introduksjon til å forstå likninger. Andre eksempler: Fyrstikkesker (med et ukjent antall fyrstikker), pakker med ukjent innhold etc

Det viktige er at elever forstår at x er en ukjent, og at målet med å løse en likning er at vi skal finne verdien til denne ukjente.

- c) Løs likningene under. Metoden du velger skal være forståelige for en elev på sjuende trinn.

i. $4 \cdot x + 10 = 30$

ii. $\frac{20}{x+2} = 5$

Løsning

Det er flere måter å tenke på her. En måte er å bruke «holde over metoden. På i) så ser vi at vi har 30 på høyre side. Da må vi ha 30 på venstre siden også. Siden vi har 10 der må $4x$ bli 20. Det betyr igjen at x må være 5, siden vi må gange 4 med 5 for å få 20.

Elever kan også «prøve og feile». De spør seg da for eksempel: «Hva om x var 2?» Da får de 4 ganger 2 pluss 10, som blir 18. Det skulle tilsvart høyre side, som er 30. Det betyr at de må prøve med et høyere tall. De prøver seg altså frem, til de finner ut hvilket tall de må gange 4 med for at summen av leddene på venstre side skal bli 30.

På ii) ser vi at divisjonsstykke på venstre side skal gi svaret 5. Da er spørsmålet hva vi må dele 20 på for å få 5. Vi ser at det må være 4 og det betyr igjen at $x + 2 = 4$ som igjen medfører at $x = 2$.

Også her kan elevene prøve seg frem med verdier for x , til de finner den verdien som gir lik verdi på venstre og høyre side av likhetstegnet.

- d) For å gjøre overgangen til symbolsk algebra så konkret som mulig for elevene sine, velger en lærer å erstatte bokstaver med objekter og benevninger. Her er to eksempler.

- i. Eksempel:

$$2b + 3a + 4b = 2 \text{ bananer} + 3 \text{ appelsiner} + 4 \text{ bananer} = 6 \text{ bananer og } 3 \text{ appelsiner}$$

- ii. Eksempel:

$$2m + 4m = 2 \text{ meter} + 4 \text{ meter} = 6 \text{ meter}$$

Hvorfor anbefales det ikke å introdusere algebra ved å erstatte bokstaver med objekter og benevninger?

Løsning:

For å få elever til å forstå variabelbegrepet er det helt avgjørende at de forstår at bokstaver erstatter tall og ingen ting annet. Det er også viktig at de forstår at dette er tall som kan variere, det kan være hvilke som helst tall. I eksemplene over erstatter læreren bokstaver med objekt og benevninger, dette forhindrer elevene fra å forstå at bokstavene skal stå for tall. Det er ikke *feil* det som står i eksemplene, men læreren vil få store problemer med å bruke tilsvarende eksempler når andre regnearter kommer inn i bildet. Å forklare $2a \cdot 2b$ med 2 appelsiner ganger 2 bananer skal godt la seg gjøre.

Videreføring av eksempel to kunne vært: $2m \cdot 4m = 8m^2$ Dette er sånn vi kan forklare at en lengde ganget med en annen lengde blir et areal, men variabelbegrepet forsvinner helt her. Dersom m skal fungere som en variabel, så må m kunne erstattes med et tall. I dette eksempelet fungerer m som benevning, og en benevning er en angivelse av antall enheter av en bestemt type. En benevnelse er navnet på enheten, mens tallet foran benevningen angir antallet av disse enhetene. Navnet på enheten kan aldri erstattes med et tall. Det forklarer hvorfor ikke benevninger kan brukes i arbeidet med variabler.

e) Forkort brøken så mye som mulig

$$\frac{2x^2 - 6x}{4x}$$

Hva er typiske feil elever gjør når de faktoriserer og forkorte slike brøker?

Løsning

$$\frac{2x^2 - 6x}{4x} = \frac{2x(x - 3)}{2x \cdot 2} = \frac{x - 3}{2}$$

En typisk elevfeil er at en korter 2 i $2x^2$ mot 2 i $4x$ slik som dette

$$\frac{2x^2 - 6x}{4x} = \frac{x^2 - 6x}{2x}$$

Dette kan følges opp med å korte 6 mot 2 slik som dette

$$\frac{x^2 - 6x}{2x} = \frac{x^2 - 3x}{x}$$

Dette kan en elev typisk feilaktig forkorte videre til

$$\frac{x^2 - 6x}{2x} = \frac{x^2 - 3x}{x} = x^2 - 3$$

Oppgave 5 (vekt 12%)

- a) En person kjøper seg en ferietur med kredittkort. Han bruker 20 000 på ferieturen. Han betaler ikke noe tilbake til banken det første året og han oppdager at etter et år har gjelden vokst til 22 900 kroner. Hva er rentesatsen til kredittkortselskapet?

Løsning

Vi kan sette opp en likning for dette. Vi starter med 20 000 kroner. Vi har en ukjent rente og vi vet at summen er vokst til 22 900 kroner etter et år.

$$20\,000 + \frac{x \cdot 20\,000}{100} = 22\,900$$

$$20\,000 + 200x = 22\,900$$

$$200x = 22\,900 - 20\,000$$

$$200x = 2900$$

$$x = 14,5$$

Renten er med andre ord 14,5%.

En annen måte å løse denne på er å se hvor stor prosentvis økning vi har på det året. Vi ser at beløpet har vokst med 2900 kroner. Vi ser hvor mange prosent dette utgjør av 20 000 kroner

$$\frac{2900}{20000} \cdot 100 = 14,5$$

- b) Etter vårsesongen bestemmer en fotballklubb seg for å sette ned prisene fordi at de har spilt så dårlig. De setter ned prisen med 25% noe som tilsvarer 60 kroner. Hva var billettprisen før klubben bestemte seg for å redusere prisen?

Løsning

Vi tenker oss at prisen før den ble satt ned var x kroner. Vi kan sette opp en likning for dette.

$$x - \frac{25 \cdot x}{100} = x - 60$$

Forklaringen her er at vi starter med billettprisen og sier at den koster x kroner. Vi trekker deretter fra 25% av prisen. På høyre side er prisen på varen etterpå. Da koster den 60 kroner mindre enn det vi startet med. Løser vi likningen får vi.

$$0,25x = 60$$

$$x = \frac{60}{0,25} = 240$$

Billetten kostet med andre ord 240 før den ble satt ned med 25%.

- c) I en fotballklubb i eliteserien har spillerne i kontrakten sin en bestemmelse om at de skal gå ned 20% i lønn om de rykker ned. Spillere og klubb er enig om dersom de rykker opp skal lønnsnivået være det samme som før de rykket ned. Hvor mange prosent må lønnen økes med ved et eventuelt opprykk?

Løsning

Noen ganger kan det være lurt å eksemplifisere dette med tall. Vi tenker oss at en spiller tjener 1 000 000 kroner i eliteserien. Om de rykker ned mister han 20% av lønnen, noe som utgjør 200 000 kroner slik at lønnen etter nedrykk vil være 800 000 kroner. Rykker laget opp igjen må lønnen økes med 200 000 kroner fra 800 000 kroner. Det vil si en økning på

$$\frac{200\,000}{800\,000} \cdot 100\% = 0,25 \cdot 100\% = 25\%$$

Vi kan generalisere dette ved å si at spilleren tjener x kroner. Ny lønn ved nedrykk blir

$$x - \frac{20}{100} \cdot x = 0,8x$$

Lønnen må ved et opprykk økes med $0,2x$. Dette utgjør

$$\frac{0,2x}{0,8x} \cdot 100\% = 0,25 \cdot 100\% = 25\%$$

Oppgave 6 (vekt 8%)

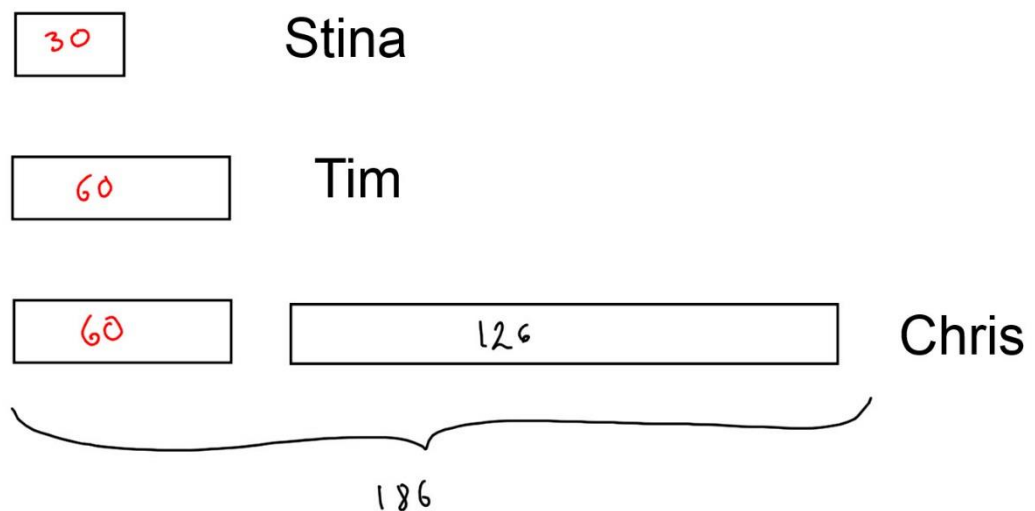
a) Oppgaven under ble gitt til elever på mellomtrinnet:

Stina har halvparten så mye penger som Tim. Chris har 186 kr, og det er 126 kr mer enn Tim. Hvor mye penger har Tim?

- i) Vis hvordan elevene kan løse oppgaven ved hjelp av å lage en modell.
- ii) Løs oppgaven som en likning.

Løsning

- i) I figuren under har vi laget en modell. Tallene med svart er opplysningen vi har oppgitt. De med rødt er verdier vi har resonert oss frem til.



- ii) Skal en sette opp en likning synes vi det er lurt å systematisere opplysningene først. Her sier vi at Tim har x kroner. Da har vi

Stina: $\frac{x}{2}$

Tim: x

Chris: 186

Nå vet vi at Chris har 126 kroner mer enn Tim. Det gir oss

$$x + 126 = 186$$

$$x = 186 - 126 = 60$$

$$x = 60$$

Tim har med andre ord 60 kroner.

b) På bildene under ser dere to like ringspill. Vekten av spillet med én ring på bilde 1 er 1400 g. Vekten for spillet med 4 ringer på bilde 2 er 2300 g. Hva er vekten til én ring, og hva er vekten til spillet uten ringer?

- i) Løs oppgaven ved å sette opp et ligningssystem med to ligninger og to ukjente som du løser. Vis utregningene dine.
- ii) Hvordan tror du elever på mellomtrinnet vil løse oppgaven?



Bilde 1



Bilde 2

Løsning

- i) Vi lar vekten på en ring være x gram og vekten på selve spillet uten ringer være y . Vi kan da sette opp følgende likningssystem

$$x + y = 1400 \quad (I)$$

$$4x + y = 2300 \quad (II)$$

Dette systemet kan løses på flere måter. Med innsetningsmetoden får vi

$$y = 1400 - x \quad (I)$$

$$4x + (1400 - x) = 2300 \quad (II)$$

Går vi videre med likning (II) får vi

$$3x - 1400 = 2300 \quad (\text{II})$$

$$3x = 900 \quad (\text{II})$$

$$x = 300 \quad (\text{II})$$

Setter vi inni (I) får vi

$$y = 1400 - 300 = 1100 \quad (\text{I})$$

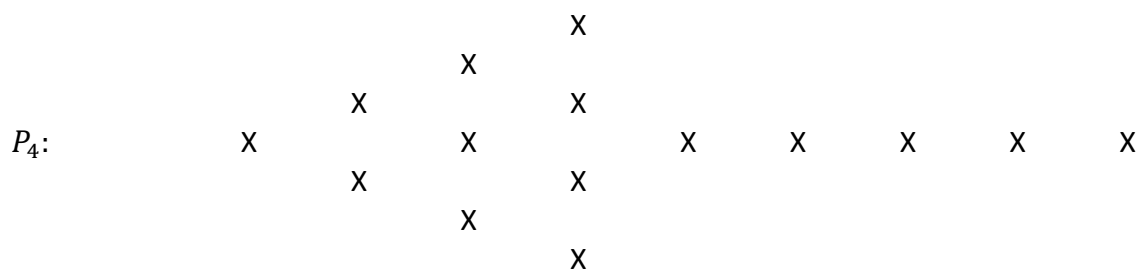
Vekten til én ring er altså 300 g, mens vekten til brettet er 1100 g

- ii) En elev kan kanskje tenke slik. Vi ser at spillet med 4 ringer veier 900 gram mer enn det med bare 1 ring. Det betyr at de 3 ekstra ringene må veie til sammen 900 gram. Da vil en ring veie 300 gram. Ser vi på bilde 1 ser vi at brettet med 1 ring veier 1400 gram. Det betyr at selve brettet veier $1400 - 300 = 1100$ gram

Oppgave 7 (vekt 8%)

I tabellen under ser du de fire første Piltallene.

P_1 :			X	X	X			
P_2 :				X				
		X			X	X	X	
				X				
P_3 :				X				
	X		X		X	X	X	X
		X						
			X					



- a) Finn antall kryss i P_5 og P_6 . Du trenger ikke tegne opp figurene.

Løsning

Finn antall kryss i P_5 og P_6 . Du trenger ikke tegne opp figurene.

Løsning

Vi ser at følgende sammenheng

$$P_1 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$P_2 = T_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$P_3 = T_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$P_4 = T_4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Vi kan finne P_5 og P_6 på flere måter. Vi kan f. eks videreføre systemet vi nettopp har funnet.

$$P_5 = T_5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$P_6 = T_6 + 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

- b) Finn en formel for antall kryss i figur P_n .

Løsning

Vi tar utgangspunkt i første metoden fra forrige spørsmål. Vi har sammenhengen

$$P_1 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$P_2 = T_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$P_3 = T_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$P_4 = T_4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$P_5 = T_5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$P_6 = T_6 + 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Dette mønsteret kan vi fortsette på. Vi erstatter nå 6 med n . Det gir oss

$$H_n = T_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

Dette svaret er akseptabelt svar til eksamen. Det er imidlertid mulig å trekke uttrykket ytterligere sammen. Da får vi.

$$\begin{aligned} H_n = T_n + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{n} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = T_{n+1} \end{aligned}$$

PS. Pilen består av en pilspiss og en linje. Hvis vi snur linjen på høykant og legger den inntil pilspissen vil vi se at figuren vi får faktisk er trekanttall $n + 1$. Dersom dere ser at

$$P_n = T_{n+1}$$

ved å gjøre dette er det selvsagt bare å bruke den metoden.