Universitetet i Sørøst-Norge

EKSAMENSFORSIDE

Skriftlig eksamen med tilsyn

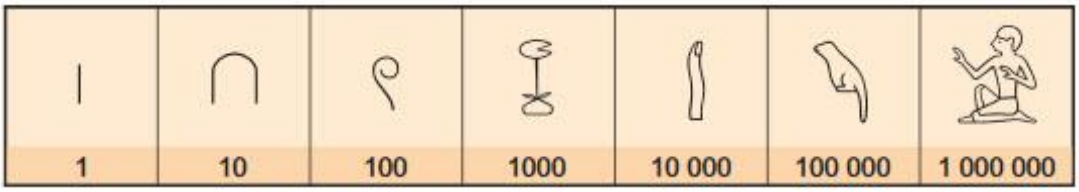
Emnekode: **MG1MA1 - LØSNINGSFORSLAG**	Emnenavn: Matematikk 1 emne 1	
Dato: 29.05.2019	Tid fra / til: 9.00-15.00	Ant. timer: 6
Ansv. faglærer: Bjørn Lauritzen/Peer Andersen		
Campus: Notodden/Nett/Finnsnes	Fakultet: HIU	
Antall oppgaver: 6	Antall vedlegg: 1	Ant. sider inkl. forside og vedlegg: 19
Tillatte hjelpemidler (jfr. emnebeskrivelse): Tegne og skrivesaker, kalkulator og åtte enkelt sider med notater.		
Opplysninger om vedlegg: Matematikkdelen av LK06 er lagt ved som vedlegg		
Merknader: NB. Alle svar skal begrunnes. Vis utregningene. Alle delspørsmål innenfor hver oppgave har lik vekt.		

Kryss av for type eksamenspapir			
Ruter	x	Linjer	☐

Oppgave 1 (20%)

a) I gamle Egypt brukte de det vi kaller et additivt tallsystem. Forklar kort prinsippet for hvordan et additivt tallsystem er bygget opp. Forklar også hvordan posisjonssystemet er bygget opp.

I Egypternes tallsystem brukte de følgende symboler



Skriv tallet 30124 med Egypternes symboler.

Løsning

Et additivt tallsystem kjennetegnes først og fremst ved at vi legger sammen verdiene til symbolene. Rekkefølgen de står i har heller ikke noe å si. Tallene ∩∩∩ IIIII og IIIII ∩∩∩ betyr begge det samme, altså 35. I et posisjonssystem har derimot plasseringen til sifferet betydning for hvilket tall vi har. Hvis vi ser f. eks på tallet 243 så angir 2 tallet hvor mange hundrere vi har, 4 tallet antall tiere og 3 tallet antall enere. Rekkefølgen sifrene står i har betydning for hvilket tall vi har. Tallet 43 er ikke det samme som 34. Tallet 20324 kan vi skrive slik med egypternes symboler

b) Gjør om tallene til det angitte tallsystemet

i) $532_{seks} = \quad _{ti}$
ii) $85_{ti} = \quad _{seks}$

Løsning:

i) $532_{seks} = 5 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 2 = 200$
ii) $85_{ti} = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 1 = 221_{seks}$

c) Regn ut i det angitte tallsystemet

i) $563_{syv} + 242_{syv} =$
ii) $5032_{åtte} - 2356_{åtte} =$
iii) $24_{seks} \cdot 45_{seks} =$

Løsning:

i) $563_{syv} + 242_{syv} = 1135_{syv}$

ii) $5032_{åtte} - 2356_{åtte} = 2454_{åtte}$

iii) Under er utregningen på gangestykket vist. Dette er regnet i stallsystemet, men jeg har tatt indeksene vekk da det ble så rotete hvis jeg tok dem med. Jeg viser to ulike måter å føre dette på. Begge er like riktige.

$$\begin{array}{r} \underline{24 \cdot 45} \\ 312 \\ \underline{134} \\ 2052 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{24 \cdot 45} \\ 212 \\ \underline{144} \\ 2052 \end{array}$$

d) Vis hvordan barn kan bruke tellestrategier for å løse addisjonsstykket 3 + 5

Løsning:

To vanlige strategier vil være at de ved hjelp av konkreter går fram på følgende måte:

- «Telle alle»-strategien. Barnet teller først den ene mengden, så den andre mengden, og deretter alle. «1,2,3 – 1,2,3,4,5 – 1,2,3,4,5,6,7,8»
- «Telle videre»-strategien. Barnet teller den første mengden, og fortsetter oppover tallrekken mens hun teller den andre. «1,2,3 - 4,5,6,7,8»

e) Bruk av tallvenner kan være en god strategi når barna kommer litt videre med addisjon. Forklar hva det er og vis ved et par eksempler hvordan barna kan bruke dette til å løse addisjonsoppgaver

Løsning:

Tallvenner er tall som på ulikt vis «hører sammen»

- Tiervenner er to tall som til sammen er ti. Oppgaven 8 + 3 kan løses som 8 + 2 = 10, så legger vi til en og vi får 11
- Summen av to like tall læres lett. 5 + 7 kan løses som 5 + 5 = 10, så legger vi til to og får 12.

Oppgave 2 (20%)

a) Den som vil bli elitesoldat må bestå tre harde tester. Erfaringsmessig faller 2/3 av kandidatene faller fra i den første testen. Av de gjenværende faller 3/5 fra i den andre testen. Hvor mange kandidater er igjen etter de to første testene?

Løsning

Vi ser at det er $\frac{1}{3}$ som har bestått første testen. Av disse er det kun $\frac{2}{5}$ som også består neste delen. Det betyr at det samlet sett er

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

som har kommet seg gjennom de to første testene. Alternativt kan en også regne ut hvor mange som stryker. Da ser vi at $\frac{2}{3}$ strøk første gang og at av de gjenvære $\frac{1}{3}$ var det $\frac{3}{5}$ som strøk på prøve to. Det gir oss

Antall som strøk på de første to testene: $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{3}{15} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$

Vi ser at siden $\frac{13}{15}$ ikke kom seg gjennom de to første testene, så må $\frac{2}{15}$ ha klart begge testene.

b) Etter at den tredje testen var unnagjort var det 1/12 av de som startet som hadde bestått alle tre testene. Dette utgjorde 20 personer. Hvor mange var det som søkte opptak som elitesoldater?

Løsning

Vi finner antall som søkte enklest ved å gange 20 med 12 siden det kun var $\frac{1}{12}$ som klarte prøven. Altså var det

$$12 \cdot 20 = 240$$

som søkte opptak.

c) Vis på to måter hvordan du ved illustrasjon kan sammenlikne brøkene 2/3 og 3/5.

Løsning

Vi kan lage illustrasjon som viser dette. I figuren under har vi laget to rektangler som er like store. Det ene er delt i tredeler og det andre i femdeler. Vi ser at $\frac{2}{3}$ er størst.

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$

Vi kan også finne fellesnevner og på den måten avgjøre hvem som størst og minst. Vi ser at 15 er fellesnevner. Det gir oss

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15}$$

Vi ser at $\frac{2}{3}$ er størst.

Vi kunne også brukt en tallinje som deles i henholdsvis 3 og 5 deler. Et eksempel på det er vist under.

Vi ser også her er at at $\frac{2}{3}$ er større enn $\frac{3}{5}$.

Det var kun spurt om to metoder, så det er selvsagt ikke nødvendig å ha med alle tre metodene.

d) Forklar hvilke misoppfatninger barn ha når de skal finne ut hvilken som er størst av to brøker.

Løsning:

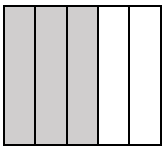
Vanlige misoppfatninger kan være disse:

- Brøker med store tall er større enn de med mindre tall, altså: $\frac{12}{17}$ er større enn $\frac{9}{10}$
- Hvor mange mangler på telleren for at brøken skal bli én? $\frac{2}{3}$ oppfattes som større enn $\frac{8}{10}$, fordi den første telleren bare mangler én, den andre mangler to.

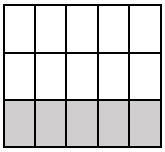
e) Å addere brøker med ulike nevnere kan være vanskelig. Vis ved et eksempel hvordan vi kan arbeide med dette uten den møysommelige prosessen med å finne fellesnevner.

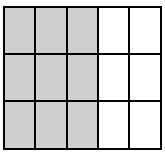
Løsning:

Vi tegner to rektangler som deles vannrett og loddrett i henholdsvis samme antall som de to nevnerne. Så kan vi skravere tilsvarende de to brøkene og telle opp ruter og legge sammen. $\frac{1}{3} + \frac{3}{5}$ kan løses slik:



Så kan vi lage to like rutenett i rektanglene (disse to stegene kan også tas i ett, slik at en går rett på den nedre figuren)





Ved opptelling ser vi at til sammen 14 ruter er skravert, og at helheten er 15. Altså er svaret $\frac{14}{15}$

Oppgave 3 (Vekt 20 %)

a) Addisjons- og subtraksjonsoppgaver kan være formulert på ulike måter – vi snakker om ulike additive strukturer. Lag en oppgave innenfor hver av disse strukturene:
   - Endring
   - Kombinere/separere
   - Sammenlikne

   Løsning:

   To mulige eksempler innenfor hver (oppgaven spør bare etter én):
   Endring
   - Elise har åtte epler, så får hun fem til. Hvor mange har hun nå?
   - Elise har åtte epler. Etter å ha gitt bort noen har hun tre igjen. Hvor mange ga hun bort.

   Kombinere
   - Lars har 10 kroner, Ingrid har fem. Hvor mange har de til sammen?
   - Lars har 10 kroner. Til sammen har Lars og Ingrid 15 kroner. Hvor mange har Ingrid?

   Sammenlikne
   - Lea har spist 18 sjokoladebiter, Tine har spist 12. Hvor mange flere har Lea spist?
   - Tine har spist 12 sjokoladebiter. Det er seks færre enn Lea. Hvor mange har Lea spist?

b) Fortell kort om fordeler ved å arbeide med tekstoppgaver kontra ferdig oppsatte regnestykker, og si også noe om utfordringer det kan by på.

Løsning:

Tekstoppgaver kan være knyttet opp mot det virkelige liv, slik at det blir en reell problemstilling, noe som motvirker at matematikken blir en verden for seg selv uten kontakt med det opplever og har kontakt med i sin hverdag.

Elevene får erfaring med selv å måtte velge metode for å løse oppgaven, og det er slik det vil være når matematikken anvendes utenfor skolen.

Utfordringer er knyttet til at det å velge metode er vanskelig så lenge undervisningen ellers er preget av rutinearbeid og «drill» med ferdig oppsatte oppgaver.

Mange elever har problemer med å forstå innholdet i en tekstlig problemstilling (lesevansker, fremmedspråklighet)

c) Forklar hva vi mener med målingsdivisjon og delingsdivisjon. Gi eksempel på en tekstoppgave innenfor begge kategoriene.

Løsning:

Ved delingsdivisjon vil en kunne dele ut «en til hver» til alle er delt ut.
Eks: Liv har en pose med 60 Nonstop som skal deles på fem personer. Hvor mange blir det på hver?

Ved målingsdivisjon teller en opp riktig antall til hver før en gjør det samme med neste.
Eks: Liv har en pose med 60 Nonstop. Hvis hver person hun deler ut til skal ha 12 Nonstop, hvor mange personer har hun til da?

d) Oppstykkingsdivisjon er en alternativ måte å løse divisjonsstykker på. Løs oppgaven $365:5$ med denne strategien

Løsning:

Oppgaven kan løses på mange vis, men en tar en passe bit av tallet og deler på 5, trekker fra det en har delt ut og gjentar prosessen til det ikke er noe igjen.
Eks:

365 : 5	
5	1
360	
10	2
350	
50	10
300	
100	20
200	
200	40
	= 73

e) Hvorfor ser mange på oppstykkingsdivisjon som en bedre metode enn den tradisjonelle divisjonsalgoritmen?

Løsning:

Den tradisjonelle divisjonsalgoritmen blir en mekanisk øvelse som er vanskelig å forstå og som ikke har noen fleksibilitet. Oppstykkingsdivisjon er nærmere det som er

en logisk tankegang for de fleste, den har en innebygd fleksibilitet slik at en deler så store biter som passer en og det er lettere å forstå hva en gjør.

Oppgave 4 (20%)

a) Løs likningen $x^2 + 4 = 4x$

Løsning

Dette er en andregradslikning. Den løses enklest ved å flytte $4x$ over på venstre siden og deretter bruke abc formelen.

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$a = 1, b = -4\,, c = 4$

$$x = \frac{-(-4) \mp \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

Likningen har kun en løsning og det er $x = 2$.

Dersom noen ser at vi kan omformuleew venstre side ved hjelp av 2. kvadratsetning så er det selvsagt også en fullgod løsning. Det ville her gitt oss

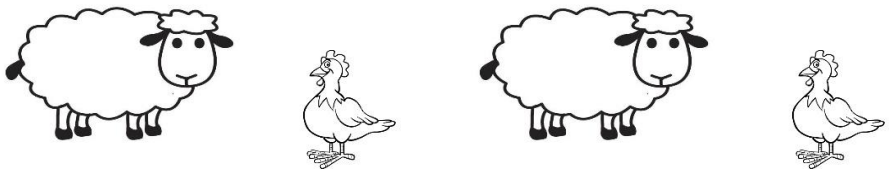
$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x - 2)^2 = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

b) En bonde har sau og høns. Han har i alt 185 dyr, og de har til sammen 460 bein. Sett opp to likninger med to ukjente og bruk de til å finne hvor mange sauer og hvor mange høns han har



Løsning

Vi lar x være antall sauer og y være antall høner. Det gir oss følgende to likninger

$x + y = 185$
$4x + 2y = 460$

Likningen kan løses både ved innsettingsmetoden og addisjonsmetoden. Det er nok med en metode, men jeg viser begge metodene her.

<u>Innsettingsmetoden</u>

$x + y = 185$ (I)
$4x + 2y = 460$ (II)

$y = 185 - x$ (I)
$4x + 2(185 - x) = 460$ (II)

$y = 185 - x$ (I)
$4x + 370 - 2x = 460$ (II)

$y = 185 - x$ (I)
$2x = 90$ (II)

$x = 45$ (II)
$y = 185 - 45 = 140$ (I)

<u>Addisjonsmetoden</u>

$x + y = 185$ (I)
$4x + 2y = 460$ (II)

$2x + 2y = 370$ (I)
$4x + 2y = 460$ (II)

Bytter om (II) og (I) for å slippe minustegn

$4x + 2y = 460$ (II)
$2x + 2y = 370$ (I)

$2x = 90$ (II)-(I)
$x = 45$

$45 + y = 185$ (I)
$y = 140$

c) Forklar hva som er karakteristisk med algebra og algebraisk tenkning i forhold til aritmetikk (tallregning)

Løsning:

Mens aritmetikken har fokus på tall og regning – det å finne det rette svaret på en oppgave, så handler algebra om å håndtere et bredt spekter av matematiske symboler og å generalisere det en gjør. Ikke ensidig fokus på regneoperasjonene, men å kunne se strukturer og prinsipper. Ved å erstatte tall med symboler slik en gjør i algebraen vil en kunne finne allmenngyldige lover som gjelder i all matematikk. Vi kan si vi har en utvikling fra retorisk algebra, der alt uttrykkes med ord, til symbolsk algebra, der alt uttrykkes med symboler.

d) Likhetstegnet kan by på problemer for barna. Hvordan kan vi arbeide med det for at de skal forstå det rett?

Løsning:

Mange elever har en operasjonell forståelse av likhetstegnet, det vil si at de ser på det som en kommando om å gjøre noe heller enn et symbol som viser at to uttrykk har samme verdi. Dette forsterkes ved at elever gjennom hele skoleløpet får oppgaver der det står et matematisk uttrykk fulgt av et likhetstegn (12 + 7 =). Variasjon i måten å skrive oppgaver, slik at svaret ikke alltid skal stå på høyre side, etter likhetstegnet, kan gi hjelp. (3 + __ = 6 – 2). Likhetstegnets rette funksjon kan også illustreres med en vektskål der likhetstegnet uttrykker likevekt (særlig aktuelt ved arbeid med likninger)

Oppgave 5 (12%)

a) i) Hva mener vi med rasjonale tall?
ii) Noen desimaltall er også rasjonale tall. Hva kjennetegner disse tallene?
iii) Gi et eksempel på et tall som ikke er et rasjonalt tall

Løsning

Et rasjonalt tall er et tall som kan skrives som en brøk. Alle heltall og brøker er naturlignok rasjonale tall. I tillegg er det også en del desimaltall som kan skrives om brøk og som dermed blir rasjonale tall. Se også ii)

Desimaltall som er rasjonale tall er enten tall med et endelig antall desimaler eller desimaltall som gjentar seg periodisk. Eksempel på det første er tall som f. eks 0,345. Eksempel på det siste er tall som 0,435435435435…….

Tall som ikke er rasjonale tall er tall som ikke kan skrives som brøk. Det mest velkjente er pi. Et annet er e (Eulers tall). Skriver vi disse på desimalform får vi

Pi: 3.1415 9265 3589 7932….
e: 2,7182 8182 8459 0452….

Det som kjennetegner disse tallene er at de ikke er periodiske. Det er ikke noe mønster som gjentas.

b) Skriv disse desimaltallene på brøkform. Forkort svaret mest mulig:

i) $0{,}168$ ii) $0{,}63636363$

Løsning

i) $0{,}168 = \frac{168}{1000} = \frac{84}{500} = \frac{42}{250} = \frac{21}{125}$

ii) Her setter vi

$x = 0{,}63636363 \ldots \ldots \ldots$ (1)

Vi ganger deretter begge sider med 100 og får

$100x = 63{,}63636363 \ldots \ldots$ (2)

Vi tar (2) minus (1). Det gir oss

$99x = 63$

$$x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

c) En elev besvarer en oppgave på følgende måte: $4{,}8 + 4{,}7 = 8{,}15$. Hvilken type misoppfatning kan ligge bak en slik regnemåte, og hva ville du gjøre for at eleven skulle forstå dette rett?

Løsning:

Eleven ser ikke ut til å ha forstått at første desimal er antall tideler, neste er hundredeler, og det kan være at eleven heller ikke ser sammenhengen mellom heltall og desimaler fordi disse legges sammen hver for seg

Oppgave 6 (vekt 8%)

I tabellen under ser du de fire første telt-tallene

			X X X X
		X X X X	X X X X X X
	X X X X	X X X X X X	X X X X X X X X
X X X X	X X X X X X	X X X X X X X X	X X X X X X X X X X
X X X X X X	X X X X X X X X	X X X X X X X X X X	X X X X X X X X X X X X
T_1	T_2	T_3	T_4

a) Finn antall kryss i T_5 og T_6. Du trenger ikke tegne opp figurene

Løsning

Vi ser at følgende sammenheng

$T_1 = 4 + 6 = 10$
$T_2 = 4 + 6 + 8 = 18$
$T_3 = 4 + 6 + 8 + 10 = 28$
$T_4 = 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 40$

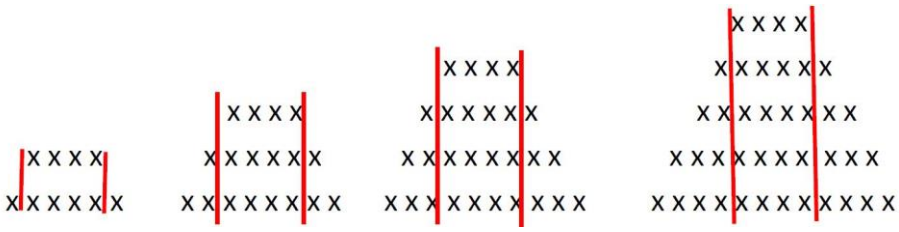
Vi ser at vi har et system her. Antall kryss øker med 8 fra første til andre figur, med 10 fra andre til tredje og 12 fra tredje til fjerde. Da er det naturlig å tenke at den øker med 14 fra fjerde til femte og 16 fra femte til sjette. Det gir oss

$T_5 = 40 + 14 = 54$
$T_6 = 54 + 16 = 70$

b) Finn en formel for antall kryss i figur T_n

Løsning

Vi prøver å dele opp figuren i mindre deler. En måte å gjøre det er som vist under.



Vi har her en sammenheng med trekanttall. Det er litt uheldig at betegnelsen T_n er benyttet til figurene da det vanligvis symboliserer trekanttall. Jeg velger her å bruke TR_n for å symbolisere trekanttallene

$T_1 = 2 \cdot TR_1 + 2 \cdot 4$
$T_2 = 2 \cdot TR_2 + 3 \cdot 4$
$T_3 = 2 \cdot TR_3 + 4 \cdot 4$
$T_4 = 2 \cdot TR_4 + 5 \cdot 4$

Vi har her et mønster. Det kan vi generalisere. Det gir oss

$$T_n = 2 \cdot TR_n + (n+1) \cdot 4$$

Vi vet nå at formel for trekanttall er

$$TR_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Det gir oss videre

$$T_n = 2 \cdot TR_1 + (n+1) \cdot 4$$

$$T_n = n(n+1) + (n+1) \cdot 4$$

$$T_n = n^2 + n + 4n + 4$$

$$T_n = n^2 + 5n + 4$$