GeoGebraøvelser i

geometri

av

Peer Andersen

© Peer Andersen 2014

Innhold

Innledning	3
Øvelse 1. Figurer i GeoGebra	4
Øvelse 2. Noen funksjoner i GeoGebra	8
Øvelse 3. Omskrevet sirkelen til en trekant	14
Øvelse 4. Innskrevet sirkelen til en trekant	16
Øvelse 5. Vinkelsum i mangekant	19
Øvelse 6. Speiling av figur	22
Øvelse 7. Rotasjon av figur	26
Øvelse 8. Parallellforskyvning av figur	29

Innledning

GeoGebra er et verktøy som har mange anvendelsesmuligheter innen matematikken. Det er i første rekke innen funksjonslære og geometri det har sine styrker, men det har også andre anvendelsesmuligheter. Blant annet inneholder det en regnearkmodul og en CAS modul. I dette heftet skal vi se på noen av mulighetene innen geometri. Geometri er imidlertid er stort felt, og dette heftet dekker på langt nær alle mulighetene innenfor geometri. For anvendelser innen funksjonslære kan dere f. eks se på dette heftet:

https://www.cappelendammundervisning.no/asset/EDITION/TEACHING_MATERIAL/Geogebraovelse r%20i%20funksjonslaren_41074..pdf?ts=1409573724000

GeoGebra er gratis og kan lastes ned på siden <u>www.geogebra.org</u>. GeoGebra finnes også tilgjengelig som gratis app til nettbrett, men versjonen for nettbrett har noe færre muligheter enn versjonen som er beregnet for PC. Det finnes også en enklere versjon av GeoGebra som heter GeoGebra Prim. Dette er en versjon som er ment for de yngre barna. Dette heftet baserer seg på den fulle PC versjonen av GeoGebra.

Når du åpner GeoGebra får du opp dette vinduet



Vi ser at vi har en rad med knapper like under menylinjen. Hver av disse knappene inneholder igjen undermenyer med ulike funksjoner. Dette gir oss en rekke muligheter til å lage spennende opplegg innen geometri. Vi skal først se på noen av de grunnleggende funksjonene som finnes i GeoGebra, deretter skal vi se på noen øvelser der vi i større grad ser på noen metodiske vinklinger.

Øvelse 1. Figurer i GeoGebra

Vi starter med å se på hvordan vi kan lage figurer som trekanter og firkanter. Du starter med å klikke på knappen som er rød ring ut. Klikk deretter på den lille rød pilen nede i høyre hjørne. Du får da opp fire alternativer. Se skjermbildet under.

GeoGebra		And the second second second second	
Fil Rediger Vis Innstillinger Veritary Vindu	u Hjelp		Logg inn
	AB	cj <u>=</u> ;2, ⊕,	• (*) 2 *
Algebrafelt Man	ngekant		<u> </u>
🛟 Reg	gulær mangekant		
Defit	inert mangekant 5 -		
Vekt	tormangekant 4-		
	3 -		
	2 -		
	1-		4

Vi skal konsentrere oss om de to øverste knappene. Den øverste knappen gir oss mulighet til å tegne mangekanter. Når du skal lage f. eks en firkant klikker du først på denne knappen. Deretter går du til grafikkfeltet og venstreklikker med musen der hvor du vil ha hjørnene i firkanten. For avslutte tegningen av firkanten klikker du på nytt på det første punktet du tegnet inn. Skjermbildet vil se ut omtrent som vist under



Vi legger merke til at det har kommet en del data inn i algebrafeltet. Den øverste linjen viser arealet til figuren. I mitt tilfelle er det 16,23. De fire linjene med rødt etter linjestykke viser lengden på

linjene. De fire blå linjene viser koordinatene til punktene i forhold til koordinatsystemet som er tegnet inn i GeoGebra.

Vi kan flytte rundt på punktene til firkanten. Det gjør du ved å først klikke på pilen i menylinjen



Deretter flytter du musen til punktet du vil flytte. Hold venstre musetast nede samtidig som du flytter punktet dit du vil. I min figur har jeg flyttet punktet litt lenger opp til venstre. Vi legger merke til at når vi flytter punktet vil både areal, lengde på sidene og koordinatene til punktene endre seg.



Firkantene vi har laget så langt har vært ikke regulære. Det vil si at det er figurer der sidene og vinklene ikke er like lange/store. GeoGebra kan også tegne opp regulære figurer. Det er figurer der alle sider er like lange og der alle vinklene er like store. Ved å klikke på knappen med Regulær mangekant.



Når du klikker på denne knappen og deretter klikker på de to første punktene i mangekanten kommer følgende vindu opp



Her velger vi hvor mange kanter vi skal ha i mangekanten. Lengden på sidene i mangekanten vil være lengden mellom de punktene vi har tegnet opp. Prøv å velge 6 hjørner. Du får da opp en regulær sekskant. Også her kan du forandre på sekskanten ved å dra i hjørnene A og B. Du kan endre størrelse på figuren, men selve formen blir uforandret siden dette er en regulær 6 kant.



En kan også tegne inn sirkler i GeoGebra. Det gjør du ved å klikke på knappen som er vist under.



Her er det de to øverste valgene som er de vi skal bruke. Den øverste tegner en sirkel ved at vi marker sentrum og ett punkt på selve sirkelen. Valg nummer to tegner opp en sirkel ved at vi først tegner inn sentrum. Deretter blir bedt om å skrive inn radiusen. Prøv å tegne opp en sirkel med begge disse valgene. I figuren under har jeg tegnet inn to sirkler. Den til venstre er med øverste valget og den nederste med andre alternativer



Vi ser at i algebrafeltet har GeoGebra angitt likningene til sirklene. Det faller utenfor pensum i matematikk 1 og gå inn på hvordan vi kommer frem til likningene. Vi ser også at koordinatene til punktene er angitt. Prøv å flytte rundt på punktene A, B og C og se hva som skjer.

Øvelse 2. Noen funksjoner i GeoGebra

I forrige øvelse så vi på hvordan vi kan lage ulike figurer i GeoGebra. Vi skal i denne øvelsen se litt på noen andre funksjoner som en kan bruke i arbeidet med GeoGebra. Dette er funksjoner som er i stor grad er knyttet opp mot konstruksjoner. Dette er funksjoner som å lage normaler, midtnormaler, halvere vinkler etc. Vi starter med å se på hvordan vi kan tegne opp en linje i GeoGebra. Du klikker da på knappen



I likhet med de andre menyknappene får en også her et utvalg av undermenyer. Hvis vi ser på de to øverste alternativene ser vi at vi kan tegne opp en linje som går gjennom to punkter og vi kan tegne opp en linje mellom to punkter. Prøv å tegne opp en linje med begge disse funksjonene. Du får da opp et bilde omtrent som vist under



Vi ser at for linjen som går gjennom punktene A og B har GeoGebra også beregnet likningen til denne linjen. For linjestykke gjennom C og D har GeoGebra beregnet lengden til linjen. Begge deler er vist i algebrafeltet.

Når en holder på geometri kan det være hensiktsmessig å fjerne koordinatsystemet. Det er kan en enkelt gjøre i GeoGebra. Klikk på ruten som er ringet ut under så blir du kvitt koordinatssystemet. Det kan enkelt hentes inn igjen ved å klikke på samme knapp.



Nedfelle normal fra punkt til linje

Det neste vi skal se på er hvordan vi kan nedfelle en normal fra et punkt til en linje. Du kan starte med å lage en rett linje som går mellom to punkt. Deretter velger du knappen som med et punkt som ligger over en linje



Deretter velger du øverste alternativet Normal til linje. Klikk en eller annen plass over eller under linjen og deretter på selve linjen og du vil se at GeoGebra nedfeller en normal fra punktet til linjen. I skjermbildet mitt på neste side har jeg tegnet inn et punkt C og GeoGebra har deretter nedfelt midtnormalen. Prøv å flytte på punkt C og se hva som skjer. Hvis du flytter punktet utenfor selve linjen vil GeoGebra nedfelle normalen til den tenkte linjen som fortsetter på utsiden av punktene.

() GeoGebra	
Fil Rediger Vis Innstillinger Verktøy Vindu Hjelp	Logg inn
	<mark>()</mark> () ()
Algebrafelt 🗗 🔀 🔻 Grafikkfelt	×
□ Linje □ b:7.792x + 1.32y = -12.66 □ Linjestyke □ a = 8.02 □ Punkt □ A = (-0.86, -1.28) □ B = (7.05, -2.6) □ C = (1.94, 2.07)	4
	₽
Skriv inn:	•

Konstruere midtnormal

Det neste vi skal se på er hvordan GeoGebra kan lage en midtnormal til et linjestykke. Du må enten slette det du har gjort eller åpne et nytt vindu. Vi starter også her med å lage et linjestykke mellom to punkter. Deretter velger du knappen Midtnormal

🗇 GeoGebra	H · ·		These property providing a first
Fil Rediger Vis Innst	illinger '	/erktøy Vindu Hjelp	
	Ŀ,		ŊABC, <u>••</u> 2, ↔,
Algebrafelt Linjestykke	1	Normal linje	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Punkt		Parallell linje	
→	X	Ndtnormal	
	4	Halveringslinje for vinkel	
	Þ	Tangenter	
	.\	Polar linje eller konjugert diameter	
	1	Beste tilpasset linje	
	8	Geometrisk sted	
			A
			3
			B

Klikk deretter en eller annen plass på selve linjen og du vil se at GeoGebra tegner opp midtnormalen. (Se neste side) Prøv å flytte på punktene A og B og se hva som skjer.

C GeoGebra		
Fil Rediger Vis Innstillinger Verktøy Vindu Hjelp		Logg inn
$\mathbb{R}, \mathbb{A}, \mathbb{A}$		 (a) (b) (c) (c)
Algebrafelt Grafikkfelt		×
Linje		
Einjestykke	b	
a = 8.02		
A = (-0.86, -1.28)	1	
→		
		4
	_A	
	ja	
	1	
	1	
Skriv inn:		

Det neste vi skal se på er vinkler. Vi skal først se hvordan vi kan måle en vinkel, deretter skal vi bruke GeoGebra til å halvere den. Du kan starte med å tegne opp ett linjestykke mellom to punkter. Deretter tegner du opp et nytt linjestykke fra det ene punktet og ut til et nytt punkt. For å måle vinkelen klikker du på knappen med vinkel og velger første alternativet. '



Deretter klikker du på ene linjen og deretter på andre linjen. Her er det viktig å klikke på linjene motsatt vei av det klokken går. I mitt tilfelle så klikker vi først på linje a og deretter på linje b. Da blir vinkelen målt opp. Det neste vi skal gjøre er å halvere vinkelen. Du klikker da på samme menyknapp som du brukte for å lage normaler. Deretter velger du alternativet med Halveringslinje for vinkel. Klikk deretter på ene linjen og så på andre linjen.



Resultatet du får opp da blir som vist under.



Det vi legger merke til er at vi får to linjer. Egentlig har vi i dette tilfelle en vinkel på 49,96 grader og en vinkel på 310,04 grader. Linje c halverer vinkelen på 49,96 grader mens linje d er en linje som står vinkelrett på halveringslinjen. Den siste linjen bruker vi normalt ikke og den kan du fjerne. Det gjør du ved å fjerne merke der hvor det er markert med rød sirkel i neste skjermbilde.



Øvelse 3. Omskrevet sirkelen til en trekant

I denne øvelsen skal vi se på hvordan vi kan tegne en omskrevet sirkelen til en vilkårlig trekant. Du kan starte med å tegne opp en trekant i GeoGebra. Pass på at du ikke lager en rettvinklet trekant, likesidet trekant eller likebeinet trekant. Lag den heller ikke for stor. Når du har laget trekanten så konstruerer du midtnormalen til de tre sidene slik vi gjorde i forrige øvelse. Da bør du ha fått opp en figur som vist under.



Vi legger merke til at alle midtnormalene skjærer hverandre i samme punktet. Prøv å flytt på punktene A, B og C og se hva som skjer. Det neste du skal gjøre er å definere et punkt i skjæringspunktet. Velg et punkt fra knappene. (Det er knappen med et punkt og en A). Flytt musen til skjæringspunktet og venstreklikk med musen. Du får tegnet inn et punkt D. Vi så i sted hvordan vi laget sirkler. Du skal nå lage en sirkel med sentrum i punkt D. Som periferipunkt velger du f. eks punkt A. (Bruk det første alternativet for å lage sirkler). Hva observerer du nå? Prøv å flytt rundt på punktene og se hva som skjer. Forhåpentligvis har du fått en figur som likner på min. (se neste ark).

Det vi ser her er at der hvor midtnormalene krysser hverandre vil være sentrum i en sirkel som går gjennom de tre punktene til trekanten. Det er fullt mulig å vise hvorfor dette er tilfelle. Dette er noe du kan prøve deg på selv. Du finner også et bevis hos NDLA

http://ndla.no/nb/node/98156



Øvelse 4. Innskrevet sirkelen til en trekant

I denne øvelsen skal vi se på hvordan vi kan tegne en innskrevet sirkelen til en vilkårlig trekant. Du kan starte med å tegne opp en trekant i GeoGebra. Pass på at du ikke lager en rettvinklet trekant, likesidet trekant eller likebeinet trekant. I motsetning til forrige øvelse så kan du godt tegne denne trekanten litt stor. Når du har tegnet inn trekanten halverer du vinklene til trekanten. Fjern også linjene som står normalt på halveringslinjene. Merk også av et punkt der halveringslinjene krysser hverandre. Da bør du ha fått frem et skjermbilde omtrent som vist under.



Prøv å lage en sirkel med sentrum i punkt D og se om du klarer å lage en sirkel som tangerer de tre sidene. Hvis du flytter på punktene, vil det være mulig da?

En kan bevise at der hvor halveringslinjene skjærer hverandre har vi sentrum til den innskrevne trekanten. En kan også vise at sirkelen tangerer sidene i trekanten i de punktene en får når en nedfeller normalen fra sentrum i sirkelen og ned på de respektive sider. For bevis for dette henvises det til NDLA og denne siden

http://ndla.no/nb/node/98168.

Vi kan utnytte det vi sa med at sirkelen tangerer sidene i det punktet hvor normalen fra sentrum treffer sidene til å lage en mer dynamisk figur. La oss prøve på det. Du starter da med å nedfelle normalen fra sentrum til sidene i trekanten. Merk deretter av punktene der hvor normalen krysser sidene. Se figur neste side.



Dette blir en nokså rotete figur. Når de skjæringspunktene er tegnet inn kan du fjerne midtnormalen igjen på samme måte som vi tidligere fjernet halveringslinjer. Da står vi igjen med en litt mer oversiktlig figur.



Det siste vi skal gjøre er å tegne opp en sirkel som går gjennom punktene E, F og G. Du velger alternativet med å tegne inn sirkel gjennom tre punkt. Figuren din vil se ut omtrent som den på neste side om du har gjort det rett. Prøv nå å flytte rundt på punktene A, B og C og se hva som skjer.



Øvelse 5. Vinkelsum i mangekant

I denne øvelsen skal vi se på hva vinkelsummen blir i en trekant og firkant. Vi starter med å tegne en trekant slik vi tidligere har gjort.

Etter at vi har laget trekanten skal vi måle vinklene til de tre vinklene. Det gjøres ved å klikke på knappen under.



Nå du deretter skal måle f. eks vinkel A klikker du først på siden AC og deretter på siden AB. Størrelsen på vinkelen kommer deretter opp. Husk å klikke på sidene i motsatt retning av det klokken går. Mål også de øvrige vinklene. Figuren din skal bør nå se ut omtrent som vist under.



Du kan også beregne alle vinklene på en gang. Du klikker da på vinkelsymbolet som vist over og deretter en eller annen plass midt i trekanten. Da blir alle vinklene målt samtidig. Du kan risikere at du da får målt de ytre vinklene, altså at vinklene er mellom 180 og 360 grader. Dette kan du endre på ved å høyreklikke på vinkel i algebrafeltet, deretter velge egenskaper. Velg deretter Basis og vinkel mellom 0 og 180 grader.



Det neste vi skal gjøre er å beregne summen av vinklene. Det er litt plunder å få det til. Jeg tror det enkleste er å endre navnene på vinklene først. Det kan du gjøre ved å høyre klikke på vinklene i algebrafeltet og deretter velge Gi nytt navn. Kall de nye vinklene for f. eks u, v og w.



Når vi har gjort det er vi klar for å beregne vinkelsummen. Det gjør vi ved å skrive inn uttrykk for summen nederst i vinduet. (se neste side). Det er mulig det er litt vanskelig å se hva som skrevet på skjermbilde. Det som står der er Vinkelsum=u+v+w



Det er ikke viktig at det står vinkelsum. Dette er bare et navn på summen. Du kan gjerne kalle denne for noe annet også.

Du vil da få opp vinkelsummen i algebrafeltet. Den er forhåpentligvis nå 180 grader.

<u>Oppgave</u>

- a) Flytt rundt på hjørnene og se hva vinkelsummen blir for ulike trekanter.
- b) Tror du dette kan være med å bidra til at elevene i skolen ser at vinkelsummen i en trekant alltid er 180 grader? Diskuterer med sidemannen.
- c) Lag en firkant og gjør samme beregning for en firkant. Hva ser du?
- d) Hvis du har tid kan du eventuelt prøve å gjøre det samme for femkant og sekskant. Klarer du å se noe system når gjelder vinkelsummen? Hva blir vinkelsummen i en n-kant?

Øvelse 6. Speiling av figur

Geogebra er velegnet til å gjennomføre symmetriavbildinger. Vi skal her først se på hvordan vi gjennomfører dette rent teknisk i GeoGebra før vi ser på noen metodiske vinklinger. Vi starter først med å tegne opp en trekant slik som vi gjorde i forrige øvelse. Du kan eventuelt tegne inn en firkant eller annen figur om du ønsker det.



For å kunne speile figuren må vi tegne inn en speilingslinje. Det gjør du ved å velge knappen med som viseren linje mellom to punkt.

Velg her f. eks det øverste valget. Du klikker to steder i det hvite området, og deretter blir en linje trukket opp. Pass på å tegne opp linjen slik at det er plass til figuren du skal speile. Når du har er ferdig med det, klikker du på knappen for speiling

🗇 Øvelse 5.ggb					
Fil Rediger Vis Innstillinger Verktøy Vindu Hjelp					
		Đ			
Algebrafeit		linje			
■ Linjestykke a = 5.8	Speil objekt om	l punkt d			
b = 4.24 c = 3.5	Reflekter om si	rkel			
Punkt A = (-3.83, 12.91)	Roter oobjekt o	m punkt med fast vinkel			
C = (-0.49, 11.88) C = (-3.06, 17.08) D = (1.84, 8.98)	Flytt objekt med	l vektor			
 □ E = (2.46, 16.82) □ Trekant 	Forstørr objekt	fra punkt			
■ Trekant Mangekant1 = 7.36 Mangekant1 = 7.36	b	a B D			

Klikk deretter mitt i trekanten og deretter på linjen du skal speile om. Da blir forhåpentligvis figuren speilet om linjen.

Oppgaver og muligheter

- Du kan flytte rundt hjørnene og se hvordan det påvirker speilbildet. Prøv å flytte på hjørnene slik at du får frem bilder av forskjellige ting, f. eks sommerfugl. Klarer du å lage andre figurer? Her kan du la elevene utforske og se hva de finner ut.
- 2. En annen ting en kan gjøre er å gi elevene oppgaver på papiret der de skal speile en figur om en linje. Når elevene har kommet med forslag til hvordan speilbildet skal se ut kan de teste det ut på Geogebra og se om det stemmer.
- 3. En tredje ting en kan gjøre er at lærer på forhånd lager en figur og speiler den om en linje, som f. eks figuren over. Deretter tar lærer vekk speilingslinjen og lar elevene tegne inn forslag til speilingslinjer. Det er forholdsvis enkelt å ta bort speilingslinjene. La oss ta utgangspunkt i bilde vi har over. Vi ser der at linjen går gjennom punktene D og E. Hvis du går til algebrafeltet og tar vekk merket foran D, E og der hvor det står linje og deretter et funksjonsuttrykk øverst i algebrafeltet. (Se figur på neste ark) Linjen skal da bli borte. La elevene tegne inn forslag til speilingslinjer og når de har funnet en linje de er fornøyd med kan du som lærer trykke frem igjen speilingslinjen på samme måte som du fjernet den. Prøv å gjør dette og test det ut med hverandre.

Bildet etter at speilingslinjen er borte vil se ut som vist på neste side

Øvelse 7. Rotasjon av figur

Vi så i forrige øvelse hvordan vi kan speile en figur rundt en linje. I denne øvelsen skal vi se på hvordan vi kan rotere en figur om et punkt med en gitt vinkel. Også i denne øvelsen kan du starte med å tegne opp en trekant. I tillegg skal du tegne opp et punkt som ligger et lite stykke unna trekanten. Du kan gjerne velge en annen figur enn trekant om du ønsker det.

Når vi skal rotere figuren følger vi samme prosedyre som for rotasjon. Klikk på knappen som vist under

🗇 Øvelse 6.ggb				
Fil Rediger Vis Innstillinger Verktøy Vindu Hjelp				
	\odot			
► Algebrafelt	▼ Grafikkfelt	Speil objekt om linje		
 ■ Linjestykke a = 5.02 b = 4.74 		Speil objekt om punkt		
		Reflekter om sirkel		
		Roter oobjekt om punkt med fast vinkel		
□ Trekant		Flytt objekt med vektor	В	
Imagekant1 = 9.52		Forstørr objekt fra punkt		
		b a		
			• ^D	
		e		
		•		

Deretter klikker du en plass midt i trekanten og deretter på punkt D. Du må så velge en vinkel som du skal rotere med. Velg f. eks 90 grader. Da får du opp et bilde omtrent som vist på neste side.

Gjennomfør to rotasjoner til, først en på 180 grader og deretter en på 270 grader. Du skal da ha fått opp fire trekanter i på skjermen.

<u>Oppgave</u>

- 1. Prøv å flytt på punktene A, B og C i den opprinnelige trekanten. Hva skjer med de roterte figurene? Prøv å lage noen fine figurer ved å flytte på A, B og C.
- 2. Også her kan vi lå elevene prøve å finne ut hvor mange grader en figur er rotert. Du som lærer kan f. eks lage en figur omtrent som dette

Hvor mange grader er figur A'B'C' rotert i forhold til ABC? Prøv å la elevene resonnere seg frem til omtrent hva svaret blir. Når de har gjort det kan de få tilgang til filen (som legges på fronter på forhånd). La elevene prøve med den vinkelen de tror det er. Deretter kan de prøve på nytt og komme med kvalifiserte forslag ut i fra hva de gjorde på forrige forsøk.

Test gjerne ut dette på hverandre og se hvordan det fungerer.

Øvelse 8. Parallellforskyvning av figur

Det siste vi skal se på i denne økten er parallellforskyvning av en figur. Du skal som før starte med å tegne opp en trekant eller en annen figur. I tillegg skal du tegne opp en vektor. Dette er et linjestykke med en gitt lengde og retning. Vi skal etter hvert forskyve vår figur med lenge og retning som denne vektoren. En vektor tegner du opp ved å bruke knappene som er merket. (se figur under)

Tegn deretter opp en vektor omtrent som vist under

Det neste vi skal gjøre er å forskyve trekanten vår. Den skal forskyves med samme lengde og retning som vektoren. Dette gjør du ved å klikke på symbolet for symmetri og deretter velge Flytt objekt med vektor. (Se figur på neste side)

Når du har trykket på dette symbolet klikker du først inne i trekanten og deretter på selve vektoren. Du får da opp en ny figur som er forskjøvet langs vektoren. Med figuren jeg har valgt blir bildet seende ut som vist under

Du kan forsikre deg om at dette er riktig ved å flytte vektoren slik at den starter i punkt A. Da bør det andre punktet på vektoren havne i A'. Tilsvarende kan du også teste ut det samme for punktene B og C.

<u>Oppgave</u>

Gjennomfør en parallellforskyvning av A'B'C' langs den samme vektoren. Du får da opp en trekant A''B''C''. Foreta en parallellforskyvning av denne også slik at du får fire trekanter.

Prøv å flytte på punktene A, B og C etter tur og se hva som skjer. Du kan også flytte på punkt E. Prøv å gjøre det og se hva som skjer. Lag noen fine mønstre ved å flytte på punktene.