

Andregradslikninger

av

Peer Andersen

Innhold

1	Innledning.....	2
2	Løsning av andregradslikning med formel.....	3
3	Grafisk løsning.....	5
4	Andregradsligninger i skolen.....	8
5	To spesialtilfeller.....	13
5.1	Spesialtilfelle når $c = 0$	13
5.2	Spesialtilfelle når $b = 0$	13
6	Fullstendig kvadraters metode – en visualisering.....	15
7	Fullstendig kvadraters metode.....	18
8	Utledning av formel for andregradslikningen.....	25
9	En geometrisk tolkning av løsning av andregradslikningen.....	27
10	Komplekse tall	30
11	Norsk matematikkhistorie	32
12	Fasit oppgaver	33

1 Innledning

En andregradsligning er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Det som kjennetegner denne likningen, er at vi har med leddet x^2 . Det gjør likningen noe mer komplisert å løse enn f. eks en vanlig førstegradsligning der vi ikke har med noe x^2 ledd.

Andregradsligninger kan løses på flere forskjellige måter. De mest vanlige er disse tre metodene

- Løse den med abc formelen
- Løse den med fullstendig kvadraters metode
- Løse den grafisk med f. eks GeoGebra

Bruk av abc formelen er nok den som er enklest rent regneteknisk. Den metoden fremmer imidlertid lite forståelse da en bare putter inn tallene i formel og får ut et svar. Vi kommer derfor ikke til å legge spesielt stor vekt på formelen i dette notatet. Vi skal presentere den sammen med noen eksempler, men hovedfokus vil ligge mot fullstendig kvadraters metode og grafisk løsning. Vi skal imidlertid ved hjelp av fullstendig kvadraters metode utlede formelen for løsning av andregradsligningen. Når en først forstår prinsippene bak fullstendig kvadraters metode er utledningen ikke så veldig vanskelig. Grafiske løsninger er det som primært brukes i ungdomsskolen og da gjerne i kombinasjon med oppgaver der det skal tegnes opp andregradsfunksjoner med graftegner.

Kapittel 8 og 9 inneholder tema som går noe videre utover det som er relevant i skolesammenheng. I kapittel 8 ser vi på en metode for å visualisere løsningene geometrisk. For å forstå denne metoden er det nødvendig med noe kunnskap i geometri, blant annet sentral- og periferivinkel teoremet. I kapittel 9 ser vi veldig kort på hvordan vi kan løse en andregradsligning med komplekse tall i de tilfeller der den vanligvis ikke har løsning. Temaene i kapittel 9 og 10 er for de som er spesielt interessert i temaet, og en mister ikke noe viktig kompetanse om disse kapitlene hoppes over. Helt til slutt har vi i kapittel 11 tatt med litt om løsning av likninger av høyere grad og den norske matematikeren Niels Henrik Abel sin betydning på dette området.

Det er laget oppgaver til alle kapitlene der dette er relevant. Bakerst i heftet er det fasit til oppgavene og illustrasjoner der hvor det er bedt om det.

2 Løsning av andregradslikning med formel

Selv om vi ikke skal ha fokus på bruk av formelen i dette heftet tar vi likevel med noen eksempler på bruk av formelen. Dette er fordi de fleste kjenner godt til formelen og det hører naturlig med å si noe om den i dette heftet. Vi skal også utlede formelen med fullstendig kvadraters metode senere.

En andregradslikning er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En likning på denne formen kan alltid løses ved å bruke formelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En andregradslikning vil alltid ha enten to løsninger, én løsning eller ingen løsning. La oss se på et eksempel på hver av disse situasjonene.

Eksempel 1

Vi starter med å løse likningen

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Vi ser her at $a = 1$, $b = -5$ og $c = 6$. Vi setter inn i formelen.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Dette gir oss to løsninger

$$x = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Eksempel 2

Vi skal nå se på ligningen

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

Vi ser her at $a = 1$, $b = 4$ og $c = 4$. Vi setter inn i formelen.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{-4}{2}$$

Dette gir oss kun en løsning siden det som står etter $\pm$ tegnet er lik 0. Løsningen blir

$$x = -2$$

Eksempel 3

Vi ser på et siste eksempel også. Vi skal finne mulige løsninger til ligningen

$$2x^2 + 3x + 4 = 0$$

Vi ser her at $a = 2$, $b = 3$ og $c = 4$. Vi setter inn i formelen.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

Vi ser at vi får et negativt tall under kvadratrottegnet. Konsekvensen av dette er at likningen ikke har noe løsning.

I kapittel 3 skal vi se nærmere på den praktiske konsekvensen av dette.

Oppgaver

Oppgave 1

Løs følgende likninger ved å bruke formelen

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $x^2 + 2x - 15 = 0$

c) $x^2 + 6x + 8 = 0$

d) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Oppgave 2

Løs følgende likninger ved å bruke formelen

a) $x^2 - 2x = 35$

b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

c) $8x^2 - 2x - 1 = 0$

d) $x^2 = 3x + 4 = 0$

3 Grafisk løsning

En metode som kan brukes til å løse andregradsligninger er å løse dem grafisk. Med det menes at vi tegner opp grafen til andregradsfunksjonen på venstre side i ligningen og deretter ser når den blir 0, altså når den krysser x -aksen.

Eksempel 1

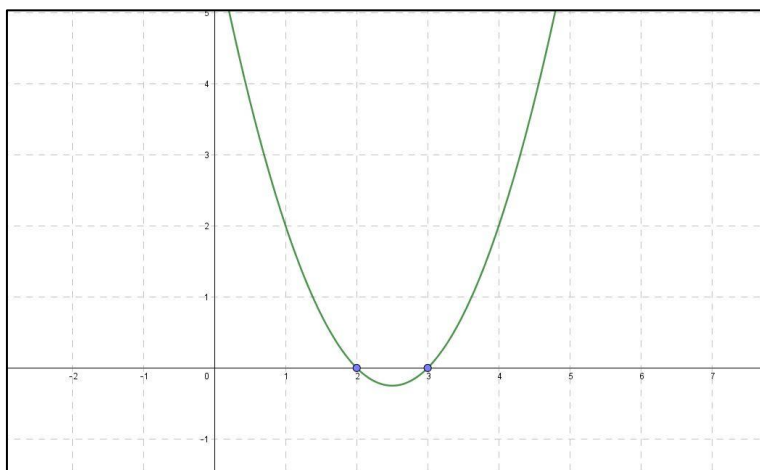
Vi ser på ligningen fra eksempel 1

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Det vi skal gjøre er å tegne opp funksjonen

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

Denne kan vi tegne for hånd ved å velge ulike x verdier og beregne tilhørende y verdier. Vi kan også bruke GeoGebra til å tegne den. I figuren under har vi vist hvordan grafen ser ut i GeoGebra.



Vi ser at grafen skjærer x -aksen for $x = 2$ og $x = 3$. Dette er altså løsningen til andregradsligningen. Vi ser at det samsvarer med det vi regnet ut med formelen i eksempel 1. Her var vi heldig og fikk heltall som løsning. Det er ikke alltid vi får det og metoden vil da ikke gi et eksakt svar med rotuttrykk, men et svar med desimaltall.

Eksempel 2

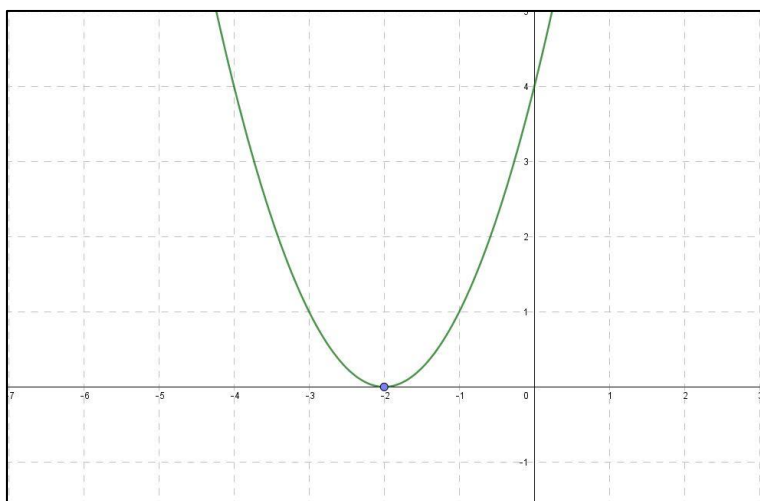
Vi ser på samme ligningen som i eksempel 2

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

Det vi skal gjøre er å tegne opp funksjonen

$$f(x) = x^2 + 4x + 4$$

Vi bruker GeoGebra til å tegne den. I figuren under har vi vist hvordan grafen ser ut i GeoGebra.



Vi ser at grafen skjærer x -aksen bare en plass og det er for $x = -2$. Egentlig skjærer den ikke x -aksen, men den tangerer den. Viser at ligningen kun har en løsning i dette tilfelle. Dette samsvarer med det vi regnet ut med formelen i eksempel 2.

Eksempel 6

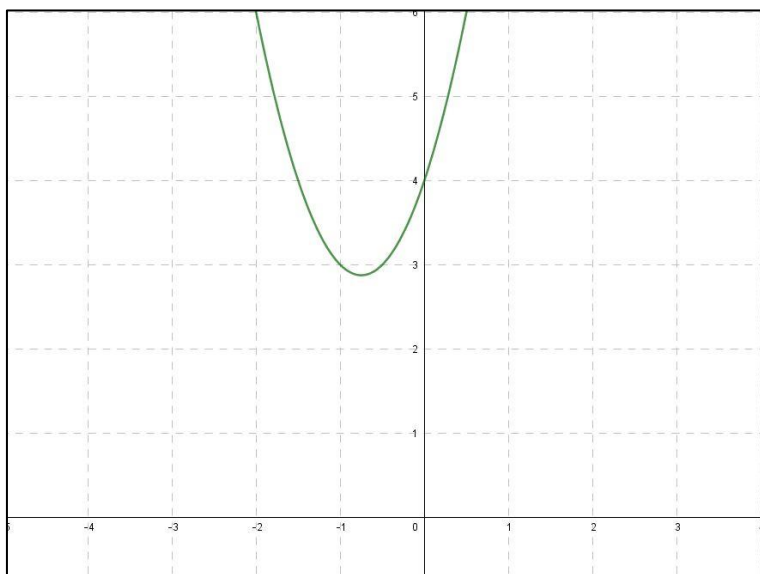
Vi ser på samme ligningen som i eksempel 3.

$$2x^2 + 3x + 4 = 0$$

Det vi skal gjøre er å tegne opp funksjonen

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 4$$

Vi bruker GeoGebra til å tegne den. I figuren under har vi vist hvordan grafen ser ut i GeoGebra.



Det vi legger merke til her er at grafen aldri skjærer x -aksen. Det finnes med andre ingen x -verdi som gjør at venstresiden i ligningen blir 0. Med andre ord så har ikke ligningen noe løsning.

Oppgaver

Oppgave 3

Løs følgende likning grafisk

a) $-x^2 + 8x - 7 = 0$

Oppgave 4

Løs følgende likning grafisk

b) $x^2 - 4x - 5 = 0$

Oppgave 5

Løs følgende likning grafisk

c) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

Oppgave 6

Finn eventuelle løsninger til likningen grafisk

c) $2x^2 + 4x + 5 = 0$

4 Andregradsligninger i skolen

Etter at det kom inn krav om at graftegnere skal brukes på eksamen i 10. klasse har også problemstillinger knyttet mot andregradsligninger blitt vanlig å spørre om til eksamen i 10. klasse. Disse oppgavene kommer typisk på del 2 og er en del av en funksjonsoppgave. Vi skal se på et par eksempler.

Eksempel 7

Oppgaven under ble gitt til eksamen i 2019

Oppgave 5 (5 poeng) **GRAFTEGNER**



En bedrift lager og selger inntil 2000 T-skjorter hver dag.
Dersom bedriften lager og selger x T-skjorter, er inntektene $I(x)$ kroner, der

$$I(x) = 60x$$

a) Hva er prisen for en T-skjorte?

b) Tegn grafen til funksjonen I for $0 \leq x \leq 2000$.

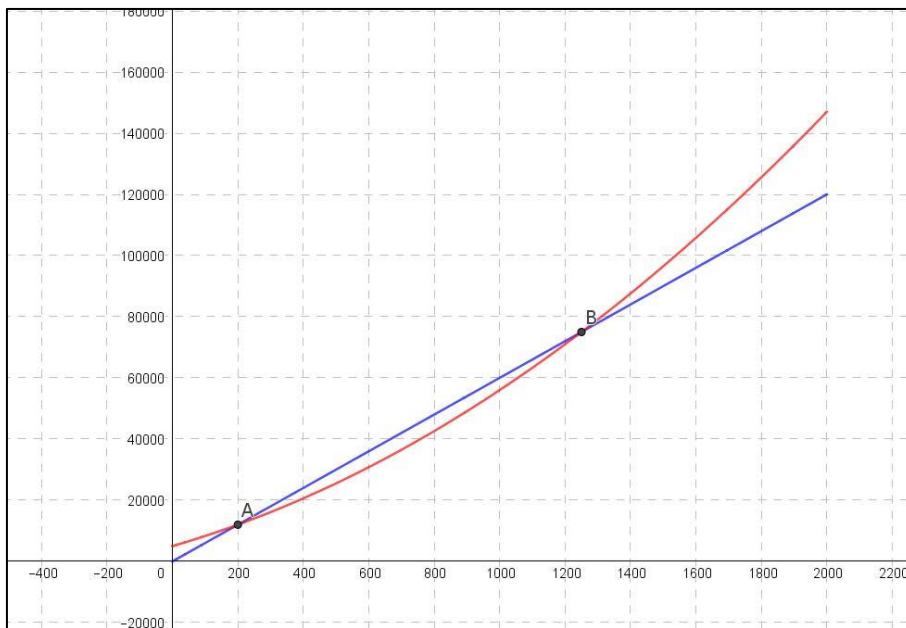
Kostnadene $K(x)$ kroner for å lage T-skjortene er gitt ved

$$K(x) = 0,02x^2 + 31x + 5000$$

c) Tegn grafen til funksjonen K for $0 \leq x \leq 2000$ i samme koordinatsystem som du brukte i oppgave b).

d) Hvor mange T-skjorter må bedriften lage og selge en dag for at inntektene skal være høyere enn kostnadene?

Dette er en oppgave der vi ser på inntekt og utgifter ved produksjon av T-skjorter. I spørsmål b) skal vi tegne grafen til inntektsfunksjonen og i c) skal vi tegne opp grafen til kostnadsfunksjonen. Vi skal deretter avgjøre hvor mange T-skjorter som må produseres og selges for at vi skal få et overskudd, altså at inntekten er større enn kostnaden. Vi tegner først opp grafene



Vi ser ut fra den grafiske fremstillingen at vi har et overskudd når blå kurven (inntekten) er større enn den røde kurven (kostnadene). Det har vi med en produksjon mellom 200 og 1250 T-skjorter. I denne oppgaven fant vi løsningen grafisk og det er det som forventes av elever på ungdomstrinnet også. Denne kan også løses ved å sette opp en andregradslikning som vi løser for å finne punktene der utgiftene er lik kostnadene. For å klare det setter vi ganske enkelt inntekten lik kostnaden

$$60x = 0,02x^2 + 31x + 5000$$

Vi samler alt på venstre side

$$-0,02x^2 + 29x - 5000 = 0$$

Når både a og c er negative som her, foretrekker jeg å dele uttrykket på -1 slik at kun b blir negativ.

$$0,02x^2 - 29x + 5000 = 0$$

Det gir mindre negative tall å regne og mindre sjanse for å gjøre feil. Vi bruker formelen for å løse denne. Vi finner at

$$a = 0,02$$

$$b = -29$$

$$c = 5000$$

Vi får da

$$x = \frac{-(-29) \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 0,02 \cdot 5000}}{2 \cdot 0,02}$$

Trekker vi sammen dette får vi

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{0,04}$$

Vi får videre at

$$x = \frac{29 \pm 21}{0,04}$$

som gir oss løsningene

$$x = \frac{29 - 21}{0,04} = 200$$

$$x = \frac{29 + 21}{0,04} = 1250$$

Vi ser at vi finner de samme løsningene som når vi løser oppgaven grafisk. Selv om elevene ikke skal løse andregradslikningen ved regning slik vi har gjort det, er det likevel viktig at vi som lærere kan dette. Dette for å kunne gi elevene gode svar om de undres på hvordan oppgaven kan løses ved regning.

Eksempel 8

Vi ser på et eksempel til fra eksamen i 10. klasse. Den vi tar for oss nå er en oppgave som ble gitt til eksamen i 2017

Oppgave 5 (6 poeng)

GRAFTEGNER



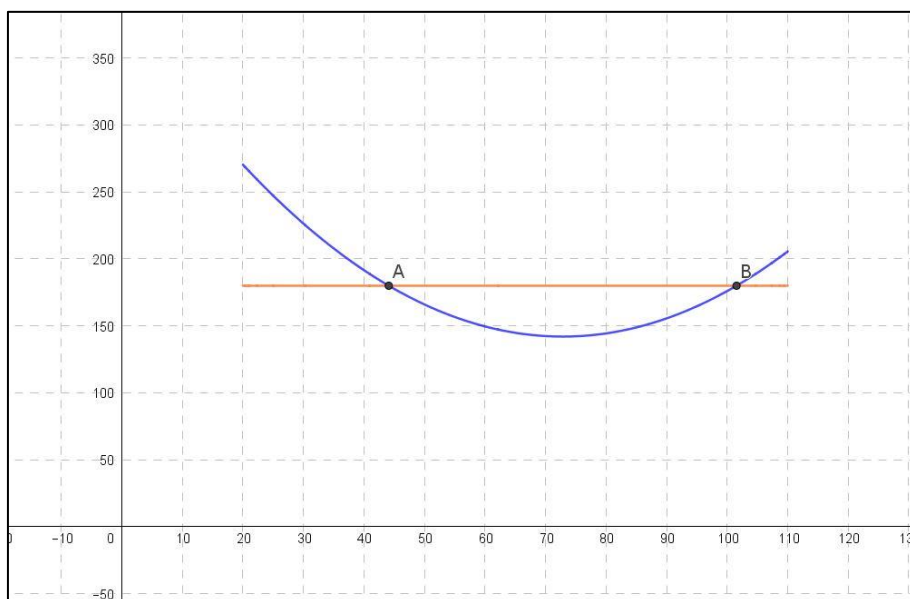
Antall gram CO_2 (karbondioksid) som en bestemt bil slipper ut per kilometer, er gitt ved funksjonen

$$f(x) = 0,046x^2 - 6,7x + 386$$

der x er farten til bilen målt i kilometer per time.

- Bruk graftegner til å tegne grafen til f for x -verdier fra og med 20 km/h til og med 110 km/h.
- CO_2 -utslippet til bilen er 180 g/km. Hvor stor fart kan bilen ha?
- Hvilken fart vil gi minst CO_2 -utslipp per kilometer?
Hvor mange gram CO_2 slipper bilen ut per kilometer da?

Dette er en oppgave der vi skal se på CO₂ utslipp. I spørsmål a) skal vi tegne opp en graf som viser utslippet per km som funksjon av farten. I spørsmål b) skal vi finne farten når vi vet at utslippet er 180 g/km. Dette spørsmålet kan løses ved å tegne opp grafen for CO₂ utslipp og grafen for linjen $y = 180$ og se hvor de skjærer hverandre. La oss gjøre det.



Leser vi av grafen ser vi at det er to punkter (A og B) der utslippet er 180 g/km. Ved å lese av grafen ser vi at dette tilsvarer en hastighet på enten ca. 44 km/t eller ca. 102 km/t.

Også denne oppgaven kan løses ved å sette opp en likning. Vi setter utslippet fra funksjonen lik 180

$$0,046x^2 - 6,7x + 386 = 180$$

Vi samler alt på venstre side

$$0,046x^2 - 6,7x + 206 = 0$$

Vi ser nå at

$$a = 0,046$$

$$b = -6,7$$

$$c = 206$$

Vi får da

$$x = \frac{-(-6,7) \pm \sqrt{(-6,7)^2 - 4 \cdot 0,046 \cdot 206}}{2 \cdot 0,046}$$

Trekkerv i sammen dette får vi

$$x = \frac{6,7 \pm \sqrt{44,89 - 37,90}}{0,092}$$

Vi får videre at

$$x = \frac{6,7 \pm 2,64}{0,092}$$

som gir oss løsningene

$$x = \frac{6,7 - 2,64}{0,092} = 44,1$$

$$x = \frac{6,7 + 2,64}{0,092} = 101,6$$

Vi ser at utregningene gir oss samme svar som det vi har lest av grafisk. Vi ser med andre ord at elevene på 10. trinn skal løse andregradslikninger, men at det er tilstrekkelig at de behersker å gjøre det grafisk.

Oppgaver

Oppgave 7

Hans Luftvik er svært interessert i fly, og han har lenge ergret seg over at det finnes så få norske flyblader. Han har lyst til å starte et nytt flymagasin. Magasinet skal komme ut en gang i måneden. Han har beregnet at kostnadene per måned kan beskrives ved funksjonen

$$K(x) = 0,0015x^2 + 20x + 50000$$

når han produserer x blader i måneden. Luftvik har videre beregnet at inntektene per måned kan beskrives med funksjonen

$$I(x) = -0,001x^2 + 50x$$

når han selger x blader i måneden. Trykkeriet som Luftvik skal bruke har kapasitet til å produsere 12000 blader i måneden

Bruk GeoGebra til å avgjøre hvor mange blader han må trykke og selge for at han skal kunne drive med overskudd.

5 To spesialtilfeller

I dette avsnittet skal vi se på to spesialtilfeller der vi kan løse andregradsligningen på en svært enkel måte. I begge disse situasjonene kan naturligvis både formel og grafisk løsning også benyttes, men som vi skal se gir det vesentlig enklere regning ved å bruke logisk tenkning og sunn fornuft. Når vi har disse tilfellene, bør vi gjøre nettopp det.

5.1 Spesialtilfelle når $c = 0$

Når $c = 0$ vil andregradsligningen være på formen

$$ax^2 + bx = 0$$

Denne kan vi bruke sunn fornuft for å løse. La oss se på et eksempel

Eksempel 9

$$2x^2 - 8x = 0$$

Det første vi legger merke til her er at vi kan dele hele ligningen med 2, så vi gjør det først. Da får vi

$$x^2 - 4x = 0$$

Metoden vi bruker når vi skal løse dette spesialtilfellet er at vi setter x utenfor en parentes på venstre side i ligningen. Det gir oss

$$x(x - 4) = 0$$

Da ser vi at vi har to muligheter

$$x = 0 \text{ eller at } x - 4 = 0.$$

Vi får løsningen $x = 0$ og $x = 4$.

5.2 Spesialtilfelle når $b = 0$

Når $b = 0$ vil andregradsligningen være på formen

$$ax^2 + c = 0$$

Denne kan vi bruke logisk tenkning for å løse. La oss se på et eksempel

Eksempel 10

$$x^2 - 16 = 0$$

Det vi gjør her er at vi flytter 16 over på høyre side. Det gir oss

$$x^2 = 16$$

Vi trekker deretter kvadratroten på begge sider. Det gir oss

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

Legg merke til at vi også her får to løsninger. Når vi trekker kvadratroten på begge sider må vi sette $\pm$ på ene siden. At vi får både en positiv og negativ løsning er enkelt å verifisere ved ganske enkelt å sette inn løsningen i likningen. Vi ser at når vi kvadrerer den negative løsningen får vi et positivt svar.

Oppgaver

Oppgave 8

Løs følgende likninger

a) $x^2 - 6x = 0$

b) $2x^2 + 10x = 0$

c) $-3x^2 + 12x = 0$

d) $-x^2 - 3x = 0$

Oppgave 9

Løs følgende likninger

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $2x^2 - 32 = 0$

c) $-2x^2 + 18 = 0$

d) $x^2 + 4 = 0$

6 Fullstendig kvadraters metode – en visualisering

Å bare putte koeffisientene a , b og c gir ikke noe særlig god matematisk forståelse. Bruk av formel kan fungere om det kun er løsningene en er ute etter, men det fremmer ingen matematisk forståelse. Vi skal i dette avsnittet se nærmere på en metode som kalles fullstendig kvadraters metode. Prinsippet her er at vi resonnerer oss frem til løsningen. I enkelte tilfeller kan den også visualiseres geometrisk. Det skal vi se nærmere på her. I neste kapittel skal vi se på metoden mer generelt.

Eksempel 11

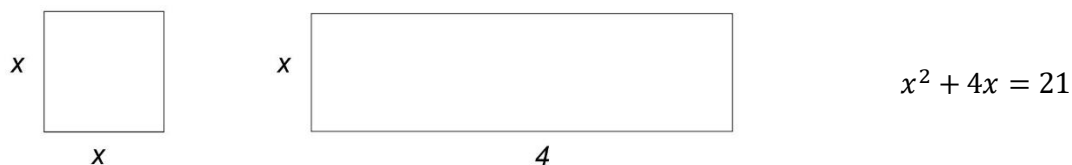
Vi skal se på likningen

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

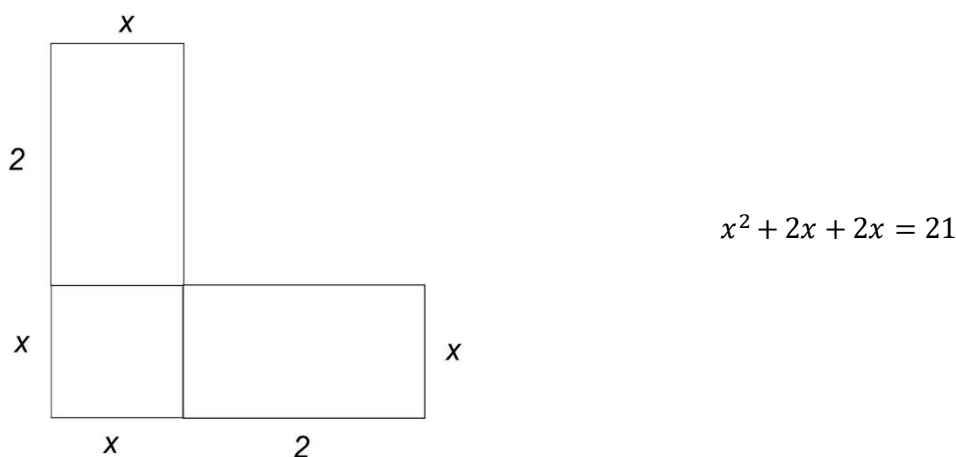
Vi skal starte med å flytte over -21 til høyre side slik at vi får

$$x^2 + 4x = 21$$

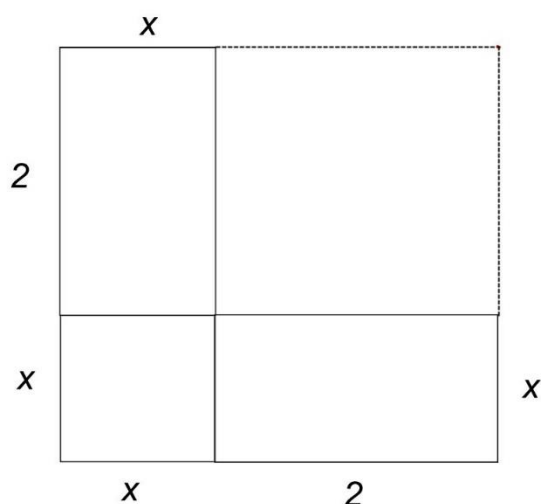
Det vi skal gjøre nå er at vi skal prøve å visualisere venstre side som et areal. Vi tenker oss at vi kan tegne opp venstre side som et kvadrat med lengde x og et rektangel med lengde 4 og bredde x .



Arealet av disse to figurene skal altså til sammen være 21. Det vi skal gjøre nå er å dele opp rektangelet i mindre rektangler med lengde 2 og bredde x . Vi får da



Arealet av disse figurene, altså kvadratet med sider x og de to rektanglene med sider x og 2 vil til sammen ha samme arealet som forrige figur, altså 21. Det neste vi skal gjøre er å bygge dette ut til et kvadrat med sider $x + 2$. Vi ser vi må fylle ut det som er tomt.



$$x^2 + 2x + 2x + 2^2 = 21 + 2^2$$

$$(x + 2)^2 = 25$$

Vi ser her at vi har lagt til et kvadrat med sidelengder på 2 for å lukke hullet i figuren. Vi har med andre ord økt arealet av figuren med 4. Det betyr at arealet av hele figuren ikke lenger er 21 men 25. Vi ser også at sidene i store kvadratet er $x + 2$ slik at likningen nå kan skrives som

$$(x + 2)^2 = 25$$

Denne kan løses som spesialtilfellet vi så på tidligere der $b = 0$. Det gir oss

$$\sqrt{(x + 2)^2} = \pm\sqrt{25}$$

$$x + 2 = \pm 5$$

Dette gir oss videre løsningene $x = 3$ og $x = -7$

Legg merke til at det er kun $x = 3$ som gir mening i forhold til illustrasjonen. Løsningen $x = -7$ er naturligvis en løsning av ligningen, men det er ikke mulig å lage noe geometrisk illustrasjon av den på denne måten.

Det er ikke alle andregradsligninger der det gir mening å bruke denne teknikken. La oss se på et eksempel.

Eksempel 12

Vi skal prøve å løse andregradsligningen

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Skriver vi om denne får vi

$$x^2 - 4x = -3$$

Skulle vi delt venstre siden opp i kvadrat og rektangel slik vi gjorde i stedet ser vi at lengden på rektangelet ville blitt -4 og det gir ikke mening. Vi ser også at om vi hadde klart å lage en figur på venstre side ville arealet blitt -3 som heller ikke gir mening. En geometrisk illustrasjon slik vi lagde i forrige eksempel lar seg ikke gjøre i dette tilfelle. Ligningen har likevel løsning og vi skal senere se hvordan denne kan løses med fullstendig kvadraters metode, men vi må da løsrive oss fra den geometriske illustrasjonen.

Metoden gir heller ikke mening om b er positiv og c er positiv, altså likninger på formen

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

Hvis vi prøver å lage en illustrasjon her vil vi kunne beskrive venstresiden som arealet av et kvadrat med sider x og et rektangel med sider x og 6 . Det gir mening. Problemet er at dette arealet vil bli -8 og det gir ikke mening.

De tilfeller der denne geometriske metoden gir mening er situasjonen der $a = 1$ og der b er positiv og c er negativ. Å få a til å være lik 1 er alltid mulig ved å dele likningen på a i de tilfellene a er forskjellig fra 1 .

Oppgaver

Oppgave 10

Løs likningen

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

ved å bruke metoden fra dette kapittelet

Oppgave 11

Løs likningen

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

ved å bruke metoden fra dette kapittelet

7 Fullstendig kvadraters metode

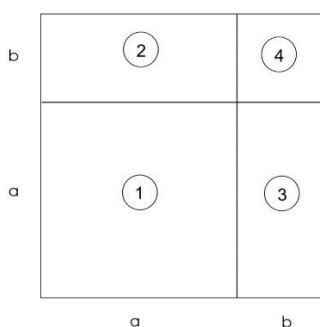
I dette avsnittet skal vi se nærmere på hvordan vi kan løse andregradslikninger med fullstendig kvadraters metode. Metoden bygger på det vi gjorde i forrige avsnitt, men vi skal løsrive oss fra visualiseringen som vi så hadde klare begrensninger.

Første kvadratsetning

Vi skal starte med å se på første kvadratsetningen. Generelt kan vi skrive første kvadratsetning som dette

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Første kvadratsetning kan vi visualisere ved å bruke figuren som er vist under



Det vi nå skal gjøre er å regne ut arealet av det store kvadratet på to måter. Den ene metoden er ganske enkelt å multiplisere lengden og bredden til det store kvadratet. Den andre er å regne ut arealet til området 1 til 4 i figuren

Areal av hele figuren

Vi ser at lengdene i kvadratet er $a + b$. Arealet av hele figuren blir derfor

$$\text{Areal: } (a + b)^2$$

Dette ser vi samsvarer med venstre side i kvadratsetningen.

Areal av område 1, 2, 3 og 4

Det vi skal gjøre her er å regne ut arealet til de fire områdene som er merket av i figuren. Dette gir jo også arealet av hele figuren. Vi legger så dette sammen og ser hva vi får.

$$\text{Areal: } a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Vi ser at dette tilsvarer høyre side i kvadratsetningen. Vi har dermed vist geometrisk at

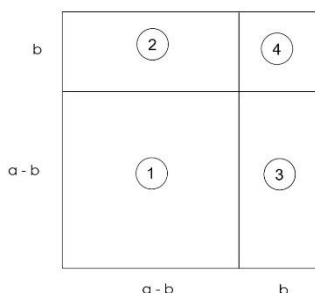
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Andre kvadratsetning

På tilsvarende måte kan vi skrive andre kvadratsetning som

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Også denne kan vi visualisere med en figur på samme måte som med første kvadratsetning.



Lengden på hele det store kvadratet er her a . Vi skal regne ut arealet av område 1 på to måter

Arealet til område 1 ved å kun se på dette området

Vi ser at lengden av kvadratet som utgjør område 1 er $(a - b)$. Arealet blir derfor

$$(a - b)^2$$

Dette ser vi tilsvarende venstre side av kvadratsetningen.

Arealet til området 1 ved å se på arealet til hele figuren minus arealet av område 2, 3 og 4

Arealet av hele det store kvadratet er a^2 . Vi trekker deretter fra arealet av område 2, 3 og 4. Det gir oss følgende areal av område 1.

$$a^2 - b(a - b) - b(a - b) - b^2 = a^2 - ba + b^2 - ba + b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Vi ser dermed at ved å regne ut arealet av området 1 på to måter så har vi vist at

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Eksempel på bruk av første kvadratsetning

La oss gjennom et enkelt eksempel se på hvordan vi kan omforme uttrykket

$$(x + 3)(x + 3)$$

Her kan vi bruke første kvadratsetning og skrive resultatet rett ut. Det er heller ingenting i veien for at vi ganske enkelt ganger ut parentesene. I begge tilfeller får vi

$$(x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$$

Når vi skal løse andregradslikninger med denne metoden skal vi gå motsatt vei. Vi skal altså starte med uttrykk som er skrevet på samme form som høyresiden og deretter prøve å omforme det til et kvadratuttrykk på samme form som på venstresiden. Vi belyser dette gjennom noen eksempler.

Eksempel 13

Vi starter med å se på ligningen

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

som er samme uttrykk som vi hadde i sted. Det vi skal gjøre nå er å omforme venstresiden til et kvadratuttrykk. I dette tilfelle er det svært enkelt siden vi i forrige eksempel gikk motsatt vei. Vi kan med andre ord omforme likningen over til

$$(x + 3)(x + 3) = 0$$

som vi igjen trekker sammen til

$$(x + 3)^2 = 0$$

Vi tar kvadratroten på begge sider og får

$$\sqrt{(x + 3)^2} = \pm\sqrt{0}$$

Dette gir oss

$$x + 3 = 0$$

som gir oss løsningen

$$x = -3$$

Eksempel 14

Vi skal nå ta for oss et eksempel som er litt mer krevende. Vi skal løse likningen

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

Her ser vi ikke umiddelbart hvordan dette skal omformes. Vi ønsker også her å omforme venstre side til et kvadratuttrykk. Det er faktisk ikke mulig å omforme dette til et kvadratuttrykk slik vi har hatt i de foregående eksemplene. Da er det store spørsmålet hvordan vi kommer oss videre med dette. Ser vi nærmere på dette eksempelet og det foregående eksempelet så ser vi at $x^2 + 6x$ er med i begge uttrykkene. Siste leddet er imidlertid forskjellig. I eksempel 13 så vi at siste leddet var 9 og at vi da kunne omforme det til et kvadratuttrykk. Det vi gjør her nå er at vi plusser på 4 på begge sider slik at vi også her får 9 på venstre side. Det gir oss

$$x^2 + 6x + 5 + 4 = 0 + 4$$

Dette skriver vi som

$$x^2 + 6x + 9 = 4$$

Nå kan vi omforme venstresiden slik vi gjorde i forrige eksempel

$$(x + 3)^2 = 4$$

Denne løser vi ved å trekke kvadratroten på begge sider

$$\sqrt{(x + 3)^2} = \pm\sqrt{4}$$

$$x + 3 = \pm 2$$

Vi får to løsninger $x = -5$ og $x = -1$

I dette eksempelet klarte vi å se hva vi skulle legge til ganske greit, men det er ikke alltid tilfelle. Vi skal se nærmere på hvordan vi kan gjøre dette generelt.

Vi tar utgangspunkt i første kvadratsetning (utregningene blir helt tilsvarende med andre kvadratsetning) som vi skriver opp motsatt vei som i sted.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

La oss nå se på en likning som vi vil omforme der vi ikke uten videre ser hva vi må legge til

$$x^2 + 10x + 21 = 0$$

Jeg synes det enkleste nå er å flytte over 21 til høyre side slik at vi får

$$x^2 + 10x = -21$$

Vi skriver venstre side på formen

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 = -21$$

Sammenlikner vi venstre side med første kvadratsetning så ser vi at $a = x$ og $b = 5$. Vi ser vi mangler b^2 som i dette tilfelle er $5^2 = 25$ på venstre side. Vi legger derfor til 5^2 på både høyre og venstre side. Det gir oss

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = -21 + 5^2$$

Nå ser vi at venstresiden kan omformes til et kvadratuttrykk. Vi får da

$$(x + 5)^2 = 4$$

Denne kan vi enkelt løse

$$\sqrt{(x + 5)^2} = \pm\sqrt{4}$$

$$x + 5 = \pm 2$$

Vi får to løsninger $x = -7$ og $x = -3$

Eksempel 15

Vi tar et eksempel til som er litt i samme stilen som foregående eksempel, men denne gang velger vi at b skal være negativ slik at vi må bruke andre kvadratsetning. Det gjør ingen stor forskjell i resonnementet eller utregningene. Vi skal se på følgende likning

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Vi gjør som i forrige eksempel og flytter 12 over på høyre side. Det gir oss

$$x^2 - 8x = -12$$

Målet vårt nå er å omforme venstresiden til et uttrykk der vi kan bruke andre kvadratsetning. Vi repeterer andre kvadratsetning før vi går videre

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Vi skriver vår ligning om litt

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 = -12$$

Sammenlikner vi dette med andre kvadratsetning ser vi at $a = x$ og $b = 4$. For å et kvadratuttrykk må vi plusse på b^2 som er det samme som 4^2 i vårt eksempel. Vi må plusse på det samme på begge sider. Gjør vi det får vi

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = -12 + 4^2$$

Dette kan vi skrive som

$$(x - 4)^2 = -12 + 16$$

som er det samme som

$$(x - 4)^2 = 4$$

Denne kan vi løse med samme teknikk som tidligere

$$(x - 4)^2 = 4$$

Denne kan vi enkelt løse

$$\sqrt{(x - 4)^2} = \pm\sqrt{4}$$

$$x - 4 = \pm 2$$

Vi får to løsninger $x = 2$ og $x = -6$

Eksempel 16

Så langt har vi kun sett på situasjoner der vi får heltallsløsningene. Dette skyldes at ligningene er valgt ut slik at de gir pene løsninger. I det virkelige liv er ikke alltid dette tilfelle. Vi ser først på et eksempel der løsningene blir pene, men utregningene litt mer kronglete enn i forrige eksempel. Vi skal løse likningen

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Vi bruker akkurat samme fremgangsmåte som i sted. Vi starter derfor med å flytte 12 over på andre siden.

$$x^2 - 7x = -12$$

Vi omformer deretter venstre siden slik at den skal bli mest mulig lik andre kvadratsetning

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} = -12$$

Vi ser her at vi får en brøk i siste leddet på venstre side. Viser at $a = x$ og $b = \frac{7}{2}$. Leddet som mangler på venstre side er b^2 som er det samme som $\left(\frac{7}{2}\right)^2$. Dette legger vi til på begge sider av ligningen. Det gir oss

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

Venstre siden omformer vi ved å bruke andre kvadratsetning.

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$$

Vi skriver høyre siden som en brøk. Det gir oss

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = -\frac{48}{4} + \frac{49}{4}$$

Dette blir

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Når vi er kommet hit løses den på samme måte som de andre likningene i dette avsnittet

$$\sqrt{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

Vi får to løsninger $x = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3$ og $x = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$

Vi legger merke til at selv om vi får brøk i utregningene så får vi likevel heltallsløsninger i dette tilfellet.

Eksempel 17

I dette eksempelet skal vi se på en ligning som ikke gir heltallsløsning. Vi ser på ligningen

$$2x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0$$

Her legger vi merke til at a ikke er lik 1 som tidligere. Vi ser at også at c er en brøk. Utregningene blir litt mer kronglete nå, men vi skal følge akkurat samme prinsipp som i de andre eksemplene. Vi starter med å dele på a som i vårt tilfelle er lik 2. Det gir oss

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$$

Vi flytter deretter $-\frac{3}{4}$ over på høyre side.

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

Vi omformer venstresiden slik at vi får det på samme form som første kvadratsetning

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Vi ser at $a = x$ og $b = \frac{1}{2}$. Vi skal nå legge til $b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ på begge sider av likningen

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Når vi skriver om uttrykket, får vi

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Når vi er kommet hit, løses den på samme måte som de andre likningene i dette avsnittet

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{1}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm 1$$

Vi får to løsninger $x = -\frac{3}{2}$ og $x = \frac{1}{2}$

Eksempel 18

Vi har tidligere sett at vi har andregradsligninger som ikke har løsning. Et interessant spørsmål er hva som skjer om vi prøver å løse en slik med denne metoden. La oss se på et eksempel

$$x^2 + 6x + 15 = 0$$

Vi følger akkurat samme prosedyre som tidligere

$$x^2 + 6x = -15$$

Akkurat denne situasjonen har vi sett på tidligere og vi ser at vi må legge til $3^2 = 9$ på begge sider. Det gir oss

$$x^2 + 6x + 9 = -15 + 9$$

Omformer vi dette får vi

$$(x + 3)^2 = -6$$

Vi ser at vi har et uttrykk opphøyd i andre potens på venstre side. Det vil alltid bli et positivt tall eller 0. Det kan ikke være et negativt tall. Men i vår ligningen står det at uttrykket blir -6 . Det finnes med andre ord ingen x verdier som passer i ligningen og ligningen har derfor ingen løsning.

Oppgaver

Oppgave 12

Løs følgende likninger med fullstendig kvadraters metode

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $x^2 + 10x - 24 = 0$

c) $2x^2 + 16x - 18 = 0$

Oppgave 13

Løs følgende likninger med fullstendig kvadraters metode

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $x^2 + 7x - 8 = 0$

c) $x^2 - 9x + 20 = 0$

8 Utledning av formel for andregradslikningen

I dette kapittelet skal vi se på hvordan vi kan utlede formelen for andregradslikningen. Vi skal med andre ord vise at løsningen til

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kan skrives på formen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi skal bruke de samme prinsippene som i forrige avsnitt. Når vi bruker dette prinsippet skal vi se at det ikke er veldig vanskelig å utlede formelen. En ting som kan skape litt forvirring er at vi har parameterne a , b og c i ligningen og formelen. Det har vi også i uttrykket for kvadratsetningene som vi har brukt tidligere. For å unngå forvirring rundt bokstavene skriver vi første kvadratsetning som dette istedenfor.

$$m^2 + 2mn + n^2 = (m + n)^2$$

Da er vi klare til å ta fatt på selve resonnementet. Vi starter med å dele hele likningen på a . Det gir oss

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Vi flytter deretter $\frac{c}{a}$ over på høyre side

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Vi gjør deretter samme omskrivning av venstre siden slik at vi får den på samme form som kvadratsetningen

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}$$

Sammenligner vi med kvadratsetningen over ser vi $m = x$ og $n = \frac{b}{2a}$. For å få et kvadrat på venstre side må vi altså addere $n^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ på begge sider

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Nå kan vi skrive om venstre siden. Vi trekker også sammen høyresiden til en brøk

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Vi tar deretter kvadratroten på begge sider. Det gir

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Fortsetter vi utregningene får vi

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dette kan vi gjøre siden $\sqrt{4a^2}$ kan skrives som $\sqrt{2a \cdot 2a} = \sqrt{(2a)^2} = 2a$

Da er vi nesten i mål med utledingen. Det som gjenstår, er å flytte $\frac{b}{2a}$ over på høyre side

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi setter dette som en brøk

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi har dermed vist formelen for løsning av andregradslikningen. Prinsippet er som sagt akkurat det samme som talleksemlene, men utregningene underveis blir noe mer komplisert enn i talleksemlene.

9 En geometrisk tolkning av løsning av andregradslikningen

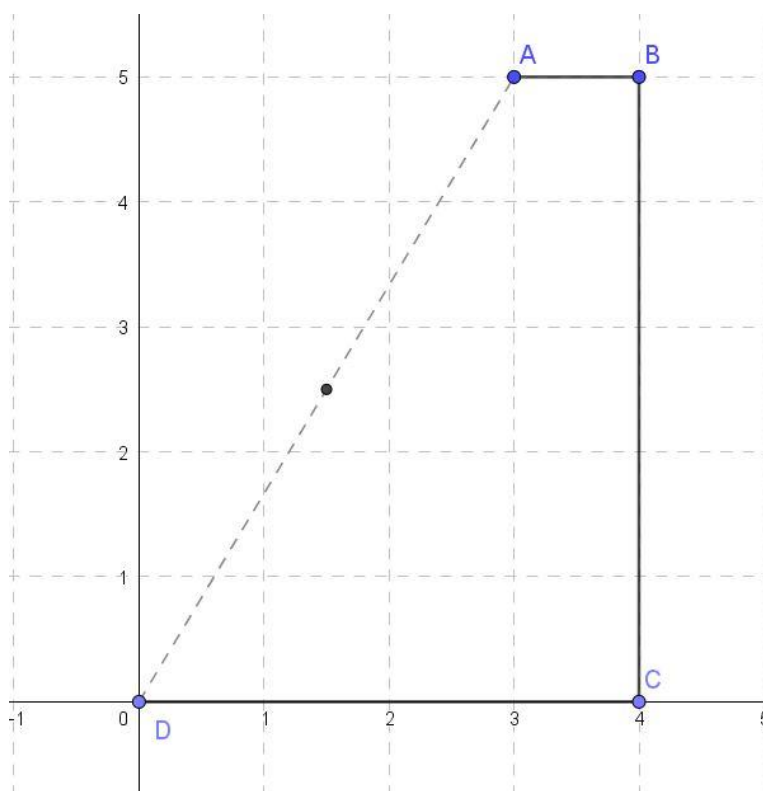
Vi så i kapittel 6 at vi i enkelte tilfeller kunne bruke figurer for å visualisere prinsippene for fullstendig kvadraters metode. Vi så også at metoden hadde en del begrensninger da det bare var i enkelte tilfeller at det gav mening med den type visualisering. I dette avsnittet skal vi se på en annen måte vi kan visualisere løsningen på og som gir mening i de tilfellene der $a = 1$, b er negativ og c er positiv. Vi skal belyse dette gjennom et eksempel. Metoden er litt mer kronglete enn den vi så på tidligere. Samtidig er resultatet kanskje litt overraskende.

Eksempel 19

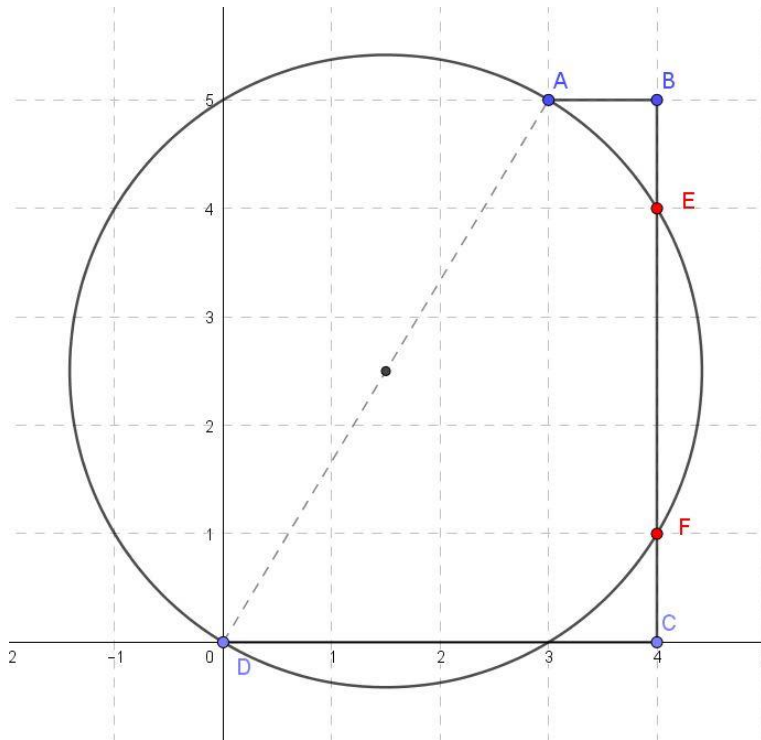
Vi ser på likningen

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Vi tar frem et koordinatsystem og tegner opp en linje DC med lengde 4 (som tilsvarer c i likningen). Vi tegner deretter opp linjen BC som har lengde 5 som tilsvarer b når vi ser bort fra minustegnet. BC skal stå vinkelrett på DC . Til slutt tegner vi opp AB som står vinkelrett på BC . Linjen AB skal ha lengde på 1. Se figuren under. Vi stipler til slutt en linje AD og merker av midtpunktet.



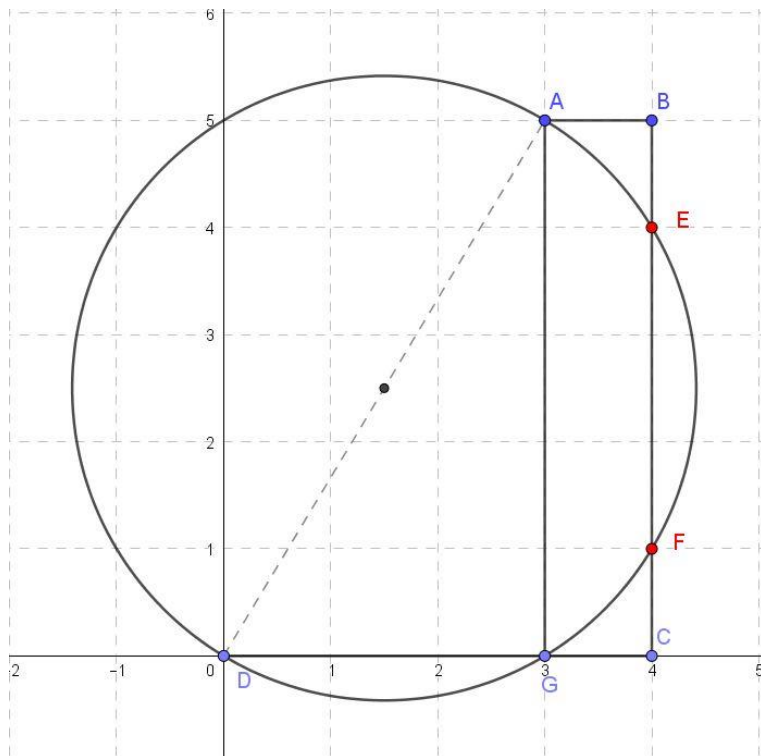
Det neste vi skal gjøre er å slå en sirkel som har diameter AD .



Vi kan nå vise at lengden på linjene CF og CE er løsninger av likningen vår! I vårt tilfelle ser vi fra figuren at løsningene blir $x = 1$ og $x = 4$. Setter vi dette inn i ligningen vår ser vi at det faktisk stemmer.

Det store spørsmålet er hvorfor det er slik og om dette gjelder alltid.

Vi starter med å trekke en linje fra punkt A til der hvor sirkelen skjærer linjen CD . Vi kaller skjæringspunktet for G .



Vinkel $\angle AGD$ må være 90 grader på grunn av Thales setning. Konsekvensen av et er at $ABCG$ må være et rektangel. Lengden til linjen CF setter vi lik x_1 og lengden til CE setter vi til x_2 . På grunn av symmetrien ser vi at $BE = CF = x_1$ og $BF = EC = x_2$. Ut ifra dette ser vi at

$$x_1 + x_2 = CF + FB = 5$$

For å komme videre nå, må vi regne ut det vi kaller potensen til punkt C . Det vil føre for langt å gå inn på selve teoremet her, men konsekvensen av det er at

$$CG \cdot CD = CF \cdot CE$$

Vi setter inn de opplysningene vi har. Vi vet at $CG = 1$ og at $CD = 4$. Samtidig vet vi at $CF = x_1$ og $CE = x_2$. Det gir oss

$$1 \cdot 4 = x_1 \cdot x_2$$

som er det samme som

$$x_1 \cdot x_2 = 4$$

Vi antar nå at x_1 og x_2 er en løsning av likningen. Det betyr at

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Vi omformer venstre side

$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0$$

Dette kan skrives på formen

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Nå vet vi jo at

$$x_1 + x_2 = 5 \text{ og at } x_1 \cdot x_2 = 4$$

Det betyr at likningen kan omformes til

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

som jo er det vi startet med. Vi har med andre ord vist at x_1 og x_2 er løsninger til likningen.

Vi har sett at resonnementet fungerer i vårt eksempel. Vi kan bruke akkurat samme prinsipp for andre likninger på samme formen. Det er også mulig å vise resultatet generelt, men vi skal ikke gjøre det her.

Oppgaver

Oppgave 14

Løs andregradslikningen

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

ved å bruke metoden som er beskrevet i dette kapittelet.

10 Komplekse tall

Vi har tidligere konkludert med at om vi får et negativt under et rottegn så har vi ikke løsningen da vi ikke kan ta kvadratroten av et negativt tall. For alle praktiske formål i skolen så er dette en fornuftig tolkning. Det er likevel mulig å utvide tallsystemet fra de reelle tallene til det vi kaller komplekse tall. Vi skal naturligvis ikke gå i dybden på komplekse tall i dette heftet, men kun nevne akkurat det som er relevant med tanke på å løse andregradslikninger som ikke har reelle løsninger.

Når vi skal definere komplekse tall innfører vi det vi kaller den imaginære enhet. Den defineres som

$$i = \sqrt{-1}$$

Et komplekst tall skrives på formen

$$a + ib \text{ der } i = \sqrt{-1}$$

Komplekse tall har svært mange anvendelser innenfor matematikk og fysikk. Mange kompliserte utregninger kan forenkles betraktelig ved hjelp av komplekse tall. Det faller imidlertid langt utenfor rammene av dette heftet og gå inn på det. Vi skal nøye oss med et eksempel der vi ser på komplekse løsninger av en andregradslikning

Eksempel 20

Vi skal løse ligningen

$$x^2 + 6x + 10 = 0$$

Vi ser her at $a = 1$, $b = 6$ og $c = 10$. Vi setter inn i formelen.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Her ville vi vanligvis stoppet og konkludert med at det ikke finnes noe løsning. Men som vi skal se så har den komplekse løsninger. Vi omformer uttrykket litt

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 2 \cdot i}{2}$$

$$x = 3 \pm i$$

Vi har med andre ord to komplekse løsninger

$$x = 3 - i$$

$$x = 3 + i$$

Vi skal naturligvis ikke innføre komplekse tall på ungdomstrinnet. Likevel er det greit for oss som lærere å ha litt kunnskap om at tallbegrepet kan utvides og at om en utvider det til de komplekse tall så kan enhver andregradslikning løses.

Når vi har komplekse løsninger, er det ofte vanlig å bruke z i istedenfor x i likningen.

Oppgaver

Oppgave 15

Løs følgende likninger

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$

b) $z^2 + 2z + 5 = 0$

11 Norsk matematikkhistorie

Vi avslutter dette notatet med litt norsk matematikkhistorie. Løsningen av andregradslikningen har vært kjent i om lag 1500 år nå. En tredjegradslikning er en likning på formen

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Det var først på 1500 tallet at italienske matematikere klarte å løse denne eksakt, det vil si ved hjelp av aritmetiske regneartene og bruk av kvadratrøtter og kubikkrøtter. Løsningen er nokså komplisert, og vi skal ikke gjengi den her. Etter at løsningen av tredjegradslikningen var funnet gikk det relativt kort tid før de også fant løsningen av en generell fjerdegradslikning, altså en likning på formen

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Løsningen på denne er også komplisert.

Etter at det var funnet eksakte løsninger for generelle tredje- og fjerdegradslikninger begynte matematikerne å se på om også likninger av femte grad og høyere grad kunne løses eksakt. Det ble jobbet i nærmere 200 år med dette og i 1824 beviste den norske matematikeren Niels Henrik Abel at det faktisk ikke er mulig å løse en generell likning av femte grad eller høyere. Abel var bare 21 år gammel når han fant dette beviset. Dette var et banebrytende resultat. Abel leverte også flere andre fremragende arbeider og regnes som en av de mest fremtredende matematikerne i historien. Abel døde bare 26 år gammel i 1829.

12 Fasit oppgaver

Oppgave 1

- a) $x = 1$ eller $x = 3$
- b) $x = -5$ eller $x = 3$
- c) $x = -2$ eller $x = -4$
- d) $x = 3$ eller $x = 4$

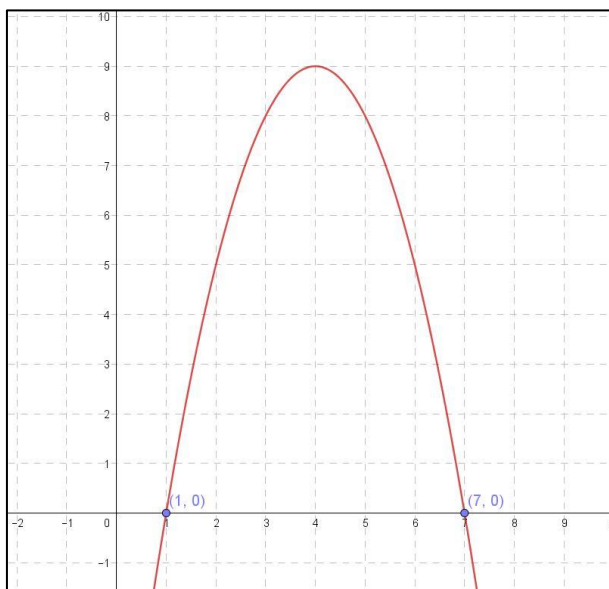
Oppgave 2

Løs følgende likninger ved å bruke formelen

- a) $x = -5$ eller $x = 7$
- b) $x = -2$ eller $x = 0,5$
- c) $x = -0,25$ eller $x = 0,5$
- d) $x = -1$ eller $x = 4$

Oppgave 3

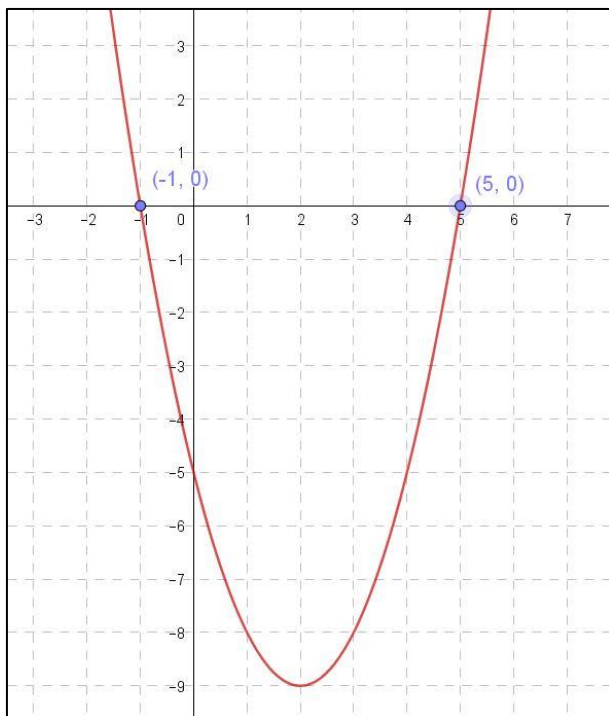
Figuren under viser grafen til funksjonen og løsningen



Vi ser at likningen har løsningene $x = 1$ og $x = 7$

Oppgave 4

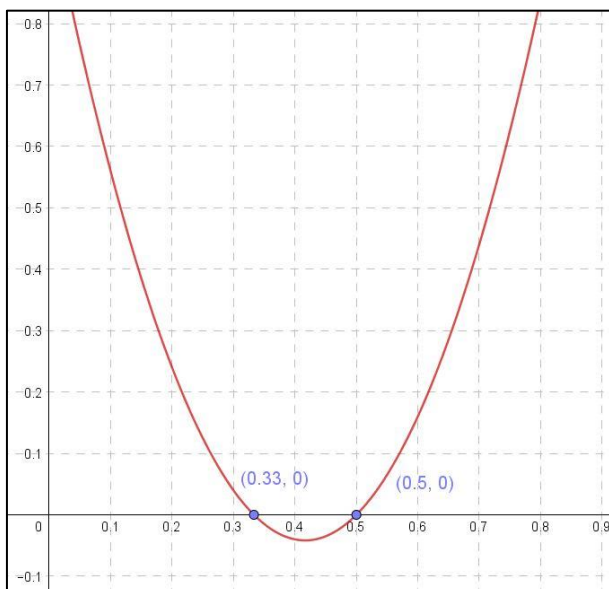
Figuren under viser grafen til funksjonen og løsningen



Vi ser at likningen har løsningene $x = -1$ og $x = 5$

Oppgave 5

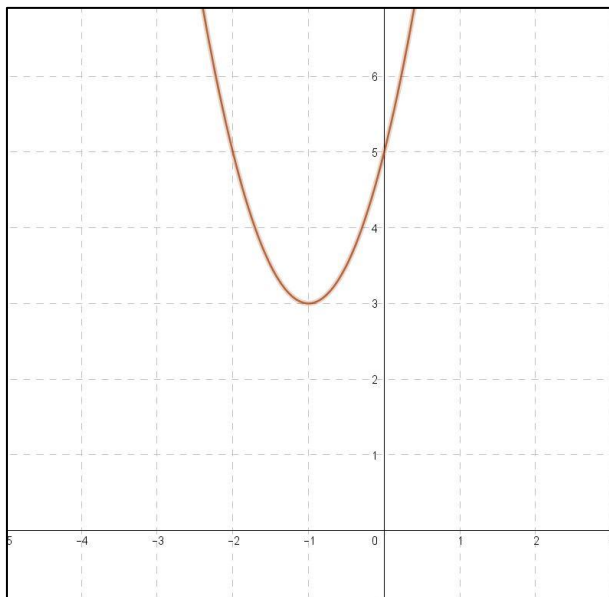
Figuren under viser grafen til funksjonen og løsningen



Vi ser at likningen har løsningene $x = 0,33$ og $x = 0,5$. Løser vi likningen med regning vil vi se at løsningene er $x = \frac{1}{3}$ og $x = \frac{1}{2}$

Oppgave 6

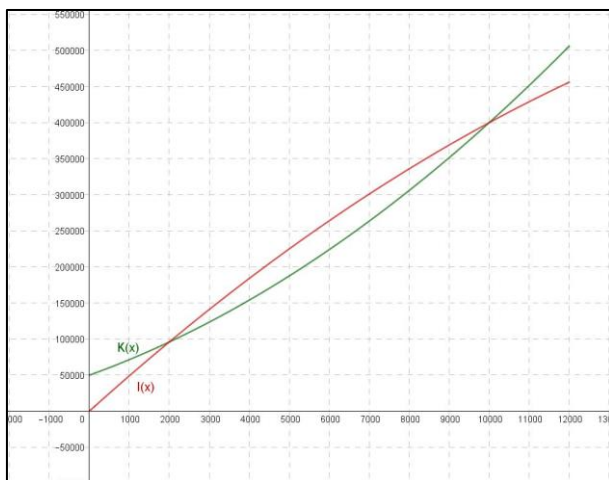
Figuren under viser grafen til funksjonen



Vi ser at likningen ikke har løsning siden grafen aldri krysser x -aksen

Oppgave 7

I figuren under har vi vist grafene



Vi ser her at grafene skjærer hverandre når $x = 2000$ og når $x = 10000$. I disse to punktene er kostnadene lik inntektene. Når salget er mellom 2000 og 10000 vil han ha overskudd

Oppgave 8

- a) $x = 0$ eller $x = 6$
- b) $x = -5$ eller $x = 0$
- c) $x = 0$ eller $x = 4$
- d) $x = -3$ eller $x = 0$

Oppgave 9

Løs følgende likninger

a) $x = -5$ eller $x = 5$

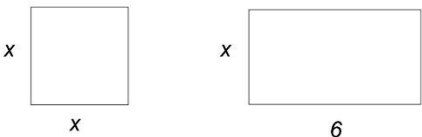
b) $x = -4$ eller $x = 4$

c) $x = -3$ eller $x = 3$

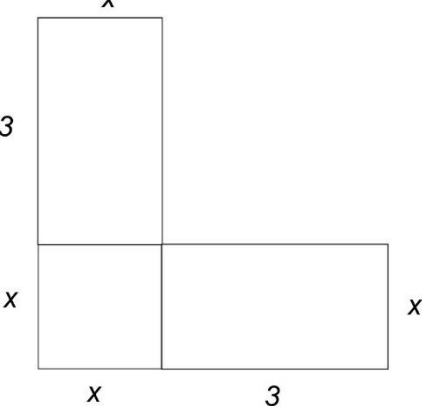
d) Likningen har ingen løsning

Oppgave 10

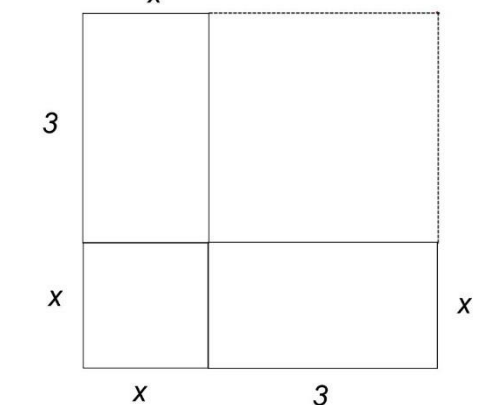
Vi viser dette ved hjelp av figurer på samme måte som i eksempelet.

	$x^2 + 6x = 7$
---	----------------

Arealet av disse to figurene skal altså være til sammen 7. Det vi skal gjøre nå er å dele opp rektangelet i mindre rektangler med lengde 3 og bredde x . Vi får da

	$x^2 + 3x + 3x = 7$
--	---------------------

Vi fyller deretter igjen hullet i figuren med et kvadrat med sider på 3

	$x^2 + 3x + 3x + 3^2 = 7 + 3^2$ $(x + 3)^2 = 16$
---	--

Vi ser nå at løsningen blir

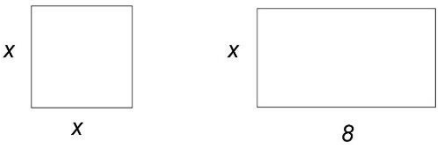
$$x = 4 - 3 = 1$$

$$x = -4 - 3 = -7$$

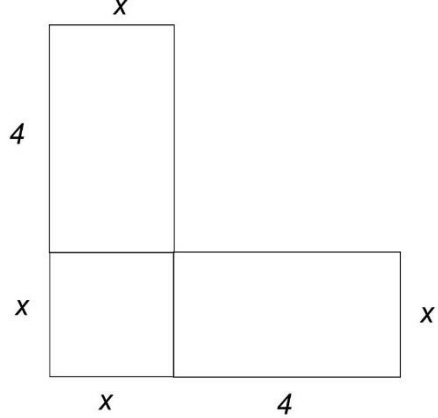
Kun den første gir mening i forhold til figuren.

Oppgave 11

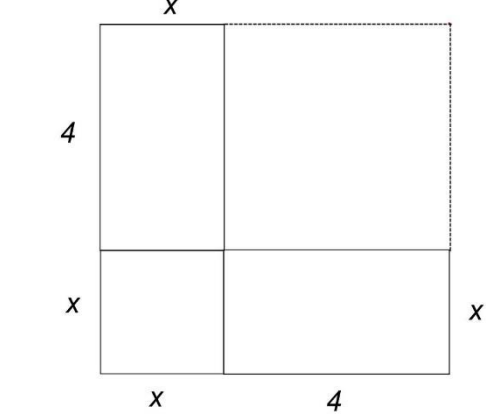
Vi viser dette ved hjelp av figurer på samme måte som i eksempelet.

	$x^2 + 8x = 48$
---	-----------------

Arealet av disse to figurene skal altså være til sammen 48. Det vi skal gjøre nå er å dele opp rektangelet i mindre rektangler med lengde 4 og bredde x . Vi får da

	$x^2 + 4x + 4x = 48$
--	----------------------

Vi fyller deretter igjen hullet i figuren med et kvadrat med sider på 4

	$x^2 + 4x + 4x + 4^2 = 48 + 4^2$ $(x + 4)^2 = 64$
---	---

Vi ser nå at løsningen blir

$$x = 8 - 4 = 4$$

$$x = -8 - 4 = -12$$

Kun den første løsningen gir mening i forhold til figuren.

Oppgave 12

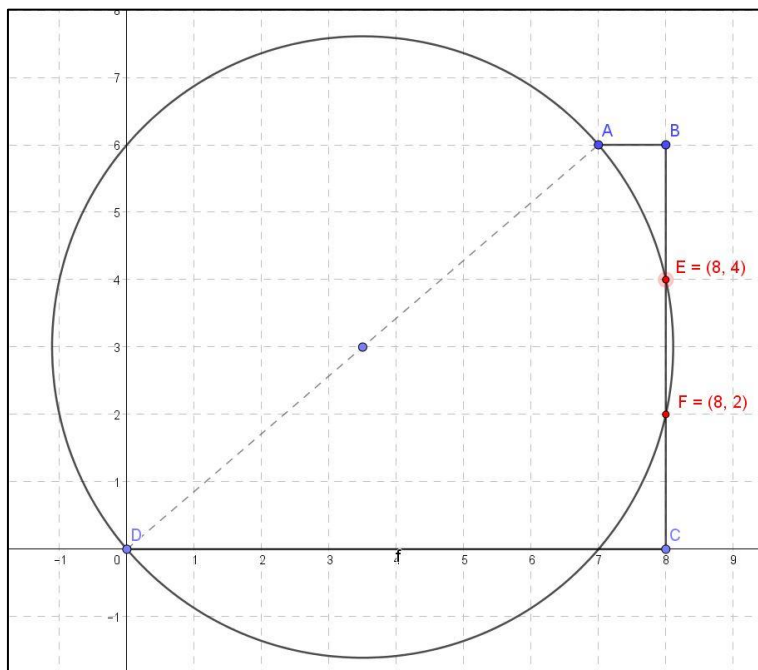
- a) $x = 1$ eller $x = 3$
- b) $x = -12$ eller $x = 2$
- c) $x = -9$ eller $x = 1$

Oppgave 13

- a) $x = 1$ eller $x = 4$
- b) $x = -8$ eller $x = 1$
- c) $x = 4$ eller $x = 5$

Oppgave 14

Vi kan lage en figur der vi bruker parameterne fra likningen



Vi ser at lengden til $CF = 2$ og $CE = 4$, noe som medfører at vi får løsningene

$x = 2$ og $x = 4$

Oppgave 15

- a) $z = 1 - i$ eller $z = 1 + i$
- b) $z = -1 - 2i$ eller $z = -1 + 2i$