Diofantiske likninger

av

Peer Andersen

Innhold

Diofantiske likninger

Vi skal i dette notatet se på hvordan diofantiske likninger kan løses. Dette blir beskrevet gjennom 11 eksempler som er relativt grundig beskrevet. Symbolet □ markerer slutten av et eksempel.

En diofantisk likning er en likning på formen

$$ax + by = c$$

der koeffisientene a, b og c er hele tall og der vi er interessert i heltallsløsninger for x og y. Det finnes mange andre typer diofantiske likninger også, men vi skal konsentrere oss om den som er beskrevet over.

Når en diofantisk likning har løsning

En diofantisk likning har løsning hvis og bare hvis c er delelig med største felles faktor til a og b, heretter betegnet som $sff(a, b)$. Hvis c ikke er delelig på $sff(a, b)$ har ikke likningen noe løsning.

<u>Eksempel 1</u>

Likningen

$$3x + 4y = 11$$

har løsning siden $sff(3,4) = 1$ og 11 er som kjent delelig med 1. Vi kommer tilbake til hvordan likningene kan løses senere. □

<u>Eksempel 2</u>

Likningen

$$3x + 6y = 5$$

har derimot ikke noe løsning siden $sff(3,6) = 3$ og 5 er ikke delelig på 3. Dette kan vi se rent intuitivt også. Sett 3 utenfor en parentes på venstre side.

$$3(x + 2y) = 5$$

Vi deler deretter med 3 på begge sider. Da får vi

$$x + 2y = \frac{5}{3}$$

Vi ser at det ikke finnes heltallsløsninger av denne, siden venstre side er et heltall og høyresiden blir et desimaltall. □

Generell løsning av den diofantiske likningen

La oss se på den diofantiske likningen $ax + by = c$. Dersom denne har løsning kan løsningen alltid uttrykkes som

$$x = x_0 + bn$$
$$y = y_0 - an$$

der x_0 og y_0 er en spesiell løsning av likningen. Dette forutsetter at likningen er forkortet så mye som mulig. På matematisk språk kan dette uttrykkes som at $sff(a, b) = 1$. Vi tar ikke med beviset for formelen her. De som er interessert i beviset kan f.eks. se i boken Tallære av Kjartan Tvete. Denne boken er tilgjengelig som elektronisk bok gjennom www.bibsys.no.

Løsningsmetode når vi kjenner en spesiell løsning

Noen ganger kan vi ut fra likningen finne en spesiell løsning. Dette gjelder spesielt enkle likninger med små tall. La oss se på eksempelet med likningen vi startet med innledningsvis.

Eksempel 3

Vi skal løse likningen

$$3x + 4y = 11$$

Her kan vi se $x = 1$ og $y = 2$ er en spesiell løsning. Den generelle løsningen vil da være

$$x = 1 + 4n$$
$$y = 2 - 3n$$

Vi kan lett sjekke dette ved å sette løsningen inn i venstre side av likningen. Vi får da

$$3x + 4y = 3 \cdot (1 + 4n) + 4 \cdot (2 - 3n) = 3 + 12n + 8 - 12n = 11$$

som jo er det samme som høyre siden av likningen. □

Eksempel 4

La oss se på likningen

$$2x + 4y = 12$$

Denne kan vi forkorte ned til

$$x + 2y = 6$$

Vi ser her at $x = 4$ og $y = 1$ er en spesiell løsning. Den generelle løsningen vil da være

$$x = 4 + 2n$$
$$y = 1 - n$$

Noen mulige løsninger vil være

$(4,1), (6,0), (8,-1), (10,-2).$

Vi har da valgt $n = 0, 1, 2, 3$

Hvis vi ikke forkorter likningen og setter rett inn i generelle formelen får vi

$$x = 4 + 4n$$
$$y = 1 - 2n$$

Dette blir også forså vidt riktig, men vi støter på et lite problem. Ved tilsvarende valg for n finner vi følgende løsninger:

$(4,1), (8,-1), (12,-3), (16,-5).$

Vi ser vi mister halvparten av løsningene ved ikke å forkorte. Så sjekk alltid om likningen kan forkortes før dere begynner å løse den. □

Løsningsmetode når vi ikke kjenner en spesiell løsning

Dersom vi ikke klarer å finne en spesiell løsning ved å betrakte likningen blir det straks litt mer komplisert. Vi kan bruke Euclids algoritme for å finne den spesielle løsningen. Vi starter med et eksempel der vi har positive koeffisienter. Vi beskriver dette stegvis.

<u>Eksempel 5</u>

Vi skal løse likningen

$$44x + 15y = 3$$

Det første vi gjør er å erstatte høyresiden med 1 slik at vi betrakter likningen

$$44x + 15y = 1$$

Istedenfor.

Vi bruker så Euclids algoritme på tallene 44 og 15. Det gir oss

$$44 = 2 \cdot 15 + 14$$
$$15 = 1 \cdot 14 + 1$$

Vi skal løse likningene med hensyn på resten. Det gir oss

$$44 = 2 \cdot 15 + 14 \quad \Rightarrow \quad 14 = 1 \cdot 44 - 2 \cdot 15 \quad (1)$$
$$15 = 1 \cdot 14 + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 \cdot 15 - 1 \cdot 14 \quad (2)$$

Vi setter nå inn uttrykket for 14 fra (1) inn i uttrykk (2). Det gir oss

$$1 = 1 \cdot 15 - 1 \cdot 14$$
$$1 = 1 \cdot 15 - 1 \cdot (1 \cdot 44 - 2 \cdot 15)$$
$$1 = 1 \cdot 15 - 1 \cdot 44 + 2 \cdot 15$$

$1 = -1 \cdot 44 + 3 \cdot 15$

Vi bytter om på venstre og høyre side og vi får da

$44 \cdot (-1) + 15 \cdot 3 = 1$ (3)

Denne skal vi sammenlikne med likningen vi skal løse. La oss stille de opp under hverandre.

$44x + 15y = 1$
$44 \cdot (-1) + 15 \cdot 3 = 1$

Vi ser nå at $x = -1$ og $y = 3$ vil være en spesiell løsning av likningen

$44x + 15y = 1$

Men nå var det ikke denne likningen vi i utgangspunktet skulle løse. Det var likningen

$44x + 15y = 3$

Vi kan utnytte det vi nettopp har gjort for å løse denne. La oss ta utgangspunkt i uttrykk (3) og gange det med 3. Det gir oss

$44 \cdot (-3) + 15 \cdot 9 = 3$

La oss sammenlikne den med vår opprinnelige likning

$44x + 15y = 3$
$44 \cdot (-3) + 15 \cdot 9 = 3$

Vi ser nå at en spesiell løsning av denne er $x = -3$ og $y = 9$. Vi ser at en spesiell løsningen til likningen $44x + 15y = 3$ kan finnes ved å gange den spesielle løsningen til likningen $44x + 15y = 1$ med 3. Dette gjelder generelt for diofantiske likninger.

Den generelle løsningen blir da

$x = -3 + 15n$
$y = 9 - 44n$ □

Vi oppsummerer hvordan vi løser likningen $ax + by = c$

- Start med å erstatte likningen med $ax + by = 1$
- Bruk Euclids algoritme først på vanlig måte og deretter baklengs for å finne en spesiell løsning av denne.
- Når den er funnet ganger du opp svaret med c
- Den generelle løsningen finner du nå ved å bruke formelen for generell løsning som vi så på innledningsvis.

Vi tar et eksempel til for å vise gangen i dette.

Eksempel 6

La oss løse likningen

$43x + 17y = 5$

Vi betrakter først likningen

$43x + 17y = 1$

istedenfor. Vi bruker Euclids algoritme på tallene 43 og 17.

Det gir oss

$$
\begin{aligned}
43 &= 2 \cdot 17 + 9 & &\Rightarrow & 9 &= 1 \cdot 43 - 2 \cdot 17 & &(1)\\
17 &= 1 \cdot 9 + 8 & &\Rightarrow & 8 &= 1 \cdot 17 - 1 \cdot 9 & &(2)\\
9 &= 1 \cdot 8 + 1 & &\Rightarrow & 1 &= 1 \cdot 9 - 1 \cdot 8 & &(3)
\end{aligned}
$$

Neste steg blir å nøste den opp baklengs. Vi tar utgangspunkt i uttrykk 3 og setter inn uttrykket for 8 fra (2). Det gir oss

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \cdot 9 - 1 \cdot 8\\
1 &= 1 \cdot 9 - 1 \cdot (1 \cdot 17 - 1 \cdot 9)\\
1 &= -1 \cdot 17 + 2 \cdot 9 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Vi tar nå uttrykket for 9 fra (1) og setter inn i (4). Det gir oss

$$
\begin{aligned}
1 &= -1 \cdot 17 + 2 \cdot 9\\
1 &= -1 \cdot 17 + 2 \cdot (1 \cdot 43 - 2 \cdot 17)\\
1 &= 2 \cdot 43 - 5 \cdot 17
\end{aligned}
$$

Vi bytter om høyre og venstre side og får

$43 \cdot 2 + 17 \cdot (-5) = 1$

Vi sammenlikner denne med likningen

$43x + 17y = 1$

Da ser vi at

$x = 2$ og $y = -5$ er en spesiell løsning til denne likningen. For å finne en spesiell løsning til likningen

$43x + 17y = 5 \qquad (5)$

ganger vi løsningen fra den foregående likningen med 5. Det medfører at $x = 10$ og $y = -25$ er en spesiell løsning av likning (5). Den generelle løsningen av likning (5) blir da

$$
\begin{aligned}
x &= 10 + 17n\\
y &= -25 - 43n \qquad \square
\end{aligned}
$$

Løsningsmetode dersom en eller flere av koeffisientene er negative

Den generelle løsningen som tidligere er beskrevet gjelder også dersom en eller flere av koeffisientene er negative. Det betyr at om vi klarer å finne en spesiell løsning kan vi finne den generelle løsningen direkte ut av denne formelen. Dersom vi ikke klarer å se en spesiell løsning ut fra likningen må vi også her bruke Euclids algoritme. Vi skal se at det ikke skaper noe større utfordringer i forhold til det vi nettopp har gjort.

Dersom c er negativ kan vi følge eksakt samme metode som er beskrevet i forrige avsnitt. Vi bruker ikke noe mer tid på det. La oss heller se på hva som skjer hvis b er negativ. Vi belyser det gjennom et eksempel.

<u>Eksempel 7</u>

Vi tar for oss likningen

$44x - 15y = 3$

Det vi gjør her er å bruke Euclids algoritme på 44 og 15 akkurat som i sted. Dette gir akkurat de samme utregningene som vi tidligere har vist. Når vi nøster opp med Euclids algoritme baklengs får vi (se eksempel 5)

$44 \cdot (-1) + 15 \cdot 3 = 1$

Sammenlikner vi det med likningen

$44x - 15y = 1$

Ser vi at $x = -1$ og $y = -3$ er en spesiell løsning av likningen

$44x - 15y = 1$

En spesiell løsning av

$44x - 15y = 3$

blir da $x = -3$ og $y = -9$

Ved å sette inn $a = 44$ og $b = -15$ i den generelle formelen på side 4 finner vi da

$x = -3 - 15n$
$y = -9 - 44n$ $\square$

Dersom a er negativ og b er positiv så kan akkurat samme fremgangsmåte brukes. Bruk Euclids algoritme baklengs på de positive koeffisientene og sammenlikn det med likningen etterpå.

Dersom både a og b begge er negative så vil det enkleste være å gange begge sider med -1.

Eksempel 8

La oss betrakte likningen

$-44x - 15y = 3$

Ganger vi begge sider med -1 får vi

$44x + 15y = -3$

Denne løses på tilsvarende måte som den i eksempel 5. □

Positive løsninger av likningen $ax + by = c$

Av og til er det slik at vi kun er på jakt etter de positive løsningene. La oss se på et eksempel.

Eksempel 9

Vi skal finne eventuelle positive løsninger til

$x + 2y = 6$

Dette er samme likning som eksempel 4. Den generelle løsningen er

$x = 4 + 2n$
$y = 1 - n$

Når vi skal finne den positive løsningen setter vi begge uttrykkene større enn 0.

$x = 4 + 2n > 0 \;\Rightarrow\; 2n > -4 \;\Rightarrow\; n > -2$ Mulige verdier for n er $n = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
$y = 1 - n > 0 \;\Rightarrow\; 1 > n \;\Rightarrow\; n < 1$ Mulige verdier for n er $n = \ldots -5 - 4, -3, -2. -1, 0$

Vi ser at det bare er $n = -1$ og er $n = 0$ som oppfyller begge ulikhetene. De positive løsningene blir derfor

$n = -1: \quad x = 2 \text{ og } y = 2$
$n = 0 \quad : \quad x = 4 \text{ og } y = 1$ □

Det er ikke alltid vi klarer å finne positive løsninger. La oss se på likningen fra eksempel 5

Eksempel 10

Vi skal prøve å finne positive løsninger til likningen

$44x + 15y = 3$

Fra eksempel 5 husker vi at den generelle løsningen var

$x = -3 + 15n$
$y = 9 - 44n$

Vi setter disse uttrykkene større enn 0.

$x = -3 + 15n > 0 \;\Rightarrow\; 15n > 3 \;\Rightarrow n > \frac{3}{15}$ Mulige verdier for n er $n =\; 1, 2, 3, 4, \ldots$

$y = 9 - 44n > 0 \quad \Rightarrow\; 9 > 44n \;\Rightarrow\; n < \frac{9}{44}$ Mulige verdier for n er $n = \ldots. -5 - 4, -3, -2. -1, 0$

Vi ser at det ikke er noen verdier for n som passer i begge disse likningene. Med andre ord finnes det ingen positive løsninger.

Dette kunne vi faktisk også sett rett ut av likningen. Det er ikke mulig å finne positive verdier for både x og y slik at venstresiden blir lik 3 siden koeffisientene er 44 og 15. □

Vi skal til slutt se på et lite praktisk eksempel.

Eksempel 11

For noen hundre år kjøpte en bonde dyr til gården sin. Han kjøpte sauer og griser for totalt 2130 kroner. Hver sau kostet 34 kroner og hver gris koster 23 kroner. Hvor mange sauer og griser kan han ha kjøpt? Denne problemstillingen kan løses ved å bruke diofantiske likninger. La oss kalle antall sauer for x og antall griser for y. Vi ser at vi kan sette opp kostnadene som en diofantisk likning.

$$34x + 23y = 2130$$

For å finne svar på spørsmålet vårt må vi løse denne og etterpå finne de positive løsningene. Her er det praktisk talt umulig å tippe en spesiell løsning av likningen og vi må derfor ty til Euclids algoritme.

Det første vi gjør er å erstatte høyresiden med 1 slik at vi betrakter likningen

$$34x + 23y = 1$$

Istedenfor.

Vi bruker så Euclids algoritme på tallene 34 og 23. Det gir oss

$$34 = 1 \cdot 23 + 11$$
$$23 = 2 \cdot 11 + 1$$

Vi skal løse likningene med hensyn på resten. Det gir oss

$$34 = 1 \cdot 23 + 11 \qquad \Rightarrow \qquad 11 = 1 \cdot 34 - 1 \cdot 23 \qquad (1)$$
$$23 = 2 \cdot 11 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 1 \cdot 23 - 2 \cdot 11 \qquad (2)$$

Vi setter nå inn uttrykket for 11 fra (1) inn i uttrykk (2). Det gir oss

$$1 = 1 \cdot 23 - 2 \cdot 11$$
$$1 = 1 \cdot 23 - 2 \cdot (1 \cdot 34 - 1 \cdot 23)$$
$$1 = 1 \cdot 23 - 2 \cdot 34 + 2 \cdot 23$$
$$1 = -2 \cdot 34 + 3 \cdot 23$$

Vi bytter om på venstre og høyre side og vi får da

$$34 \cdot (-2) + 23 \cdot 3 = 1 \qquad (3)$$

Denne skal vi sammenlikne med likningen vi skal løse. La oss stille de opp under hverandre.

$$34x + 23y = 1$$
$$34 \cdot (-2) + 23 \cdot 3 = 1$$

Vi ser nå at $x = -2$ og $y = 3$ vil være en spesiell løsning av likningen

$$34x + 23y = 1$$

En spesiell løsningen til likningen

$$34x + 23y = 2130$$

vil derfor være

$$x = -2 \cdot 2130 = -4260$$
$$y = \quad 3 \cdot 2130 = 6390$$

(jmf eksempel 5)

Den generelle løsningen til likningen kan skrives som

$$x = -4260 + 23n$$
$$y = 6390 - 34n$$

Siden det her er snakk om sauer og griser er vi bare interessert i de positive løsningene. Vi setter derfor begge større enn 0.

$x = -4260 + 23n > 0 \;\Rightarrow\; 23n > 4260 \;\Rightarrow\; n > 185{,}2$ Mulige verdier for n er $n = 186, 187, 188..$
$y = 6390 - 34n > 0 \;\Rightarrow 6390 > 34n \;\Rightarrow\; n < 187{,}9$ Mulige verdier for n er $n = 187, 186, 185..$

Vi ser at det kun er 186 og 187 som passer for begge ulikhetene. Vi har derfor to mulige alternativer for hvor mange dyr han kjøpte.

Hvis vi setter $n = 186$ får vi

$$x = -4260 + 23 \cdot 186 = 18$$
$$y = 6390 - 34 \cdot 186 = 66$$

Hvis vi setter $n = 187$ får vi

$$x = -4260 + 23 \cdot 187 = 41$$
$$y = 6390 - 34 \cdot 187 = 32$$

For å oppsummere så ser vi at bonden enten har kjøpt 18 sauer og 66 griser, eller så har han kjøpt 41 sauer og 32 griser. □

Oppgaver diofantiske likninger

Oppgave 1

Finn generelle løsningen (eventuelle) til følgende likninger

a) $2x + 3y = 7$
b) $4x + y = 6$
c) $2x + 4y = 8$
d) $4x + 8y = 13$
e) $5x - 3y = 7$
f) $-4x + 6y = 2$

Oppgave 2

Finn eventuelle positive løsninger til likningene

a) $x + 3y = 13$
b) $4x + y = 18$
c) $2x + 4y = 16$
d) $2x + 3y = 4$

Oppgave 3

Finn generelle løsningen til følgende likninger

a) $7x + 17y = 5$
b) $13x + 16y = 25$
c) $23x + 56y = 17$
d) $19x - 35y = 127$
e) $29x + 34y = 5$

Oppgave 4

En bonde skal kjøpe noen høner til hønsegården sin. Dette er en liten hønsegård som han har mest for moro skyld. Hos leverandøren får han informasjon om at han kan kjøpe to forskjellige typer høner. Vi kaller de her for høne A og høne B. En høne av type A koster 43 kroner og en høne av type B koster 57 kroner. Bonden kjøper høner for 4320 kroner. Finn ut hvor mange høner av type A og type B bonden kan ha kjøpt. Sett opp en diofantisk likning og løs denne.

Oppgave 5

Norwegian har for tiden svært rimelige billetter fra Bergen til Sandefjord. De billigste billettene koster bare 199 kroner. Den nest billigste koster 249 kroner. Et idrettslag skal reise fra Bergen til Sandefjord. De betaler totalt 3186 kroner for billettene sine. Finn ut hvor mange som fikk billett for 199 kroner og hvor mange som måtte betale 249 kroner ved å sette opp en diofantisk likning.

Oppgave 6

En gruppe på 20 personer reiste til London på tur sammen. På turen til London fikk gruppen noen billetter til 355 kroner, noen billetter til 381 kroner og resten måtte de betale 484 kroner for. Totalt betalte de 7927 kroner for billettene. Finn ut hvor mange som reiste på billettene til henholdsvis 355 kroner, 381 kroner og 484 kroner. *(Hint. Du får her to likninger med tre ukjente. Disse kan omformes til en diofantisk likning av samme type som vi ellers har jobbet med)*

Fasit

Oppgave 1

a) $x = 2 + 3n, y = 1 - 2n$
b) $x = 1 + n, y = 2 - 4n$
c) $x = 2 + 2n, y = 1 - n$
d) Ingen løsning
e) $x = 2 - 3n, y = 1 - 5n$
f) $x = 1 + 3n, y = 1 + 2n$

Oppgave 2

a) $x = 1, y = 4$
$x = 4, y = 3$
$x = 7, y = 2$
$x = 10, y = 1$
b) $x = 4, y = 2$
$x = 3, y = 6$
$x = 2, y = 10$
$x = 1, y = 14$
c) $x = 2, y = 3$
$x = 4, y = 2$
$x = 6, y = 1$
d) Ingen positiv løsning

Til oppgave 2a er det laget videoløsning: https://youtu.be/1asud8JGj-4

Oppgave 3

a) $x = 25 + 17n, y = -10 - 7n$
b) $x = 125 + 16n, y = -100 - 13n$
c) $x = -289 + 56n, y = 119 - 23n$
d) $x = -1397 - 35n, y = -762 - 19n$
e) $x = -35 + 34n, y = 30 - 29n$

Til oppgave 3d er det laget videoløsning: https://youtu.be/gzUKB4ey6SQ

Oppgave 4

Han har kjøpt enten 9 høner av type A og 69 av type B, eller så har han kjøpt 66 av type A og 26 av type B

Se også videoløsning av oppgaven: https://youtu.be/UmEhDplfTeI

Oppgave 5

Her har 6 stykker reist med billetter til 199 kroner og 8 har reist på billetter til 249 kroner.

Oppgave 6

Det er 8 stykker som har reist på billett til 355 kroner, 7 stykker med billett til 381 kroner og 5 stykker med billett til 484 kroner.

Se også videoløsning av oppgaven: https://youtu.be/xZK0gFCMnEU