Lineære funksjoner

av

Peer Andersen og Beate Haugom Bigseth

Februar 2024

Innhold

1 Lineære funksjoner

En lineær funksjon er en funksjon som er skrevet på formen

$y = ax + b$

I mange sammenhenger vil dere også se at den gjerne skrives som

$f(x) = ax + b.$

Hvorfor akkurat bokstaven f er brukt er sannsynligvis fordi begrepet funksjon har f som første bokstav både på engelsk, fransk, tysk, italiensk, spansk samt flere andre språk.

I noen tilfeller har vi tiden som variabel. Da erstatter vi gjerne x med t og y med noe som beskrivende for situasjonen. Et eksempel på dette er sammenhengen mellom strekning og tid. Dersom farten er konstant v kan strekningen etter t sekunder beskrives av funksjonen

$s(t) = v \cdot t$

Et annet eksempel er innenfor økonomi. Skal vi beskrive kostnadene til en bedrift bruker vi ofte $K(x)$ istedenfor $f(x)$. Et eksempel på dette er en bedrift som produserer en vare. De har faste kostnader på 10 000 kroner måneden uansett uavhengig av hva de produserer. Dette kan være husleie etc. I tillegg har de variable kostnader som råmaterialet til hver artikkel etc. La oss si at det utgjør 120 kroner. Kostnadene kan beskrives som en kostnadsfunksjon

$K(x) = 120x + 10000$

Vi kommer primært til å bruke skrivemåte $y = ax + b$ i dette heftet, men dere vil også se at vi fra tid til annen bruker $f(x)$, $K(x)$ og også andre notasjoner der det gir en bedre beskrivelse av situasjonen. Typisk vil dette være å bruke t istedenfor x når det er snakk om tid. Grafen til en lineær funksjon vil alltid bli en rett linje. Vi skal i dette kapittelet se nærmere på lineære funksjoner og hvordan vi kan jobbe med dem. Vi skal starte med å tegne opp grafen til en funksjon, for deretter å gå videre mot å finne et funksjonsuttrykk når vi kjenner to punkter som grafen går igjennom. Vi skal også se nærmere på noen praktiske eksempler der vi kan anvende lineære funksjoner.

1.1 Koeffisientene a og b

For de fleste er det en kjent sak at i likningen $y = ax + b$ så uttrykker a stigningstallet og b skjæring med y-aksen. Et interessant spørsmål er hvorfor det egentlig er slik. Vi skal se at dette ikke er vanskelig å vise.

<u>Koeffisienten b</u>

Dette er den enkleste å vise. Vi erstatter ganske enkelt x med 0 i uttrykket. Vi finner da at $y = b$. Se også figur på neste side.

<u>Koeffisienten a</u>

Denne forteller noe om stigningstallet til grafen, altså hvor fort den stiger eller synker. Dette kan vi enklest vise ved å ta utgangspunkt i et konkret eksempel. La oss se på funksjonen

$y = 3x + 2$

Hvis vi velger

$x = 0$ får vi at $y = 2$.

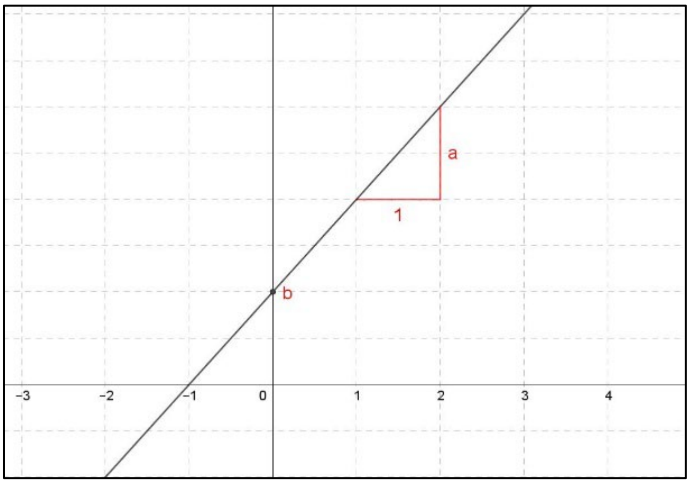
Øker vi x verdien til 1 får vi

$x = 1$ og at $y = 5$.

Vi øker x til 2. Det gir oss

$x = 2$ og at $y = 8$

Vi ser i dette eksempelet at når vi øker x med 1 så øker y med 3. Med andre ord er stigningstallet lik 3 i dette tilfellet. Generelt kan vi si at når vi har likningen $y = ax + b$ så vil y øke med a når x øker med 1.

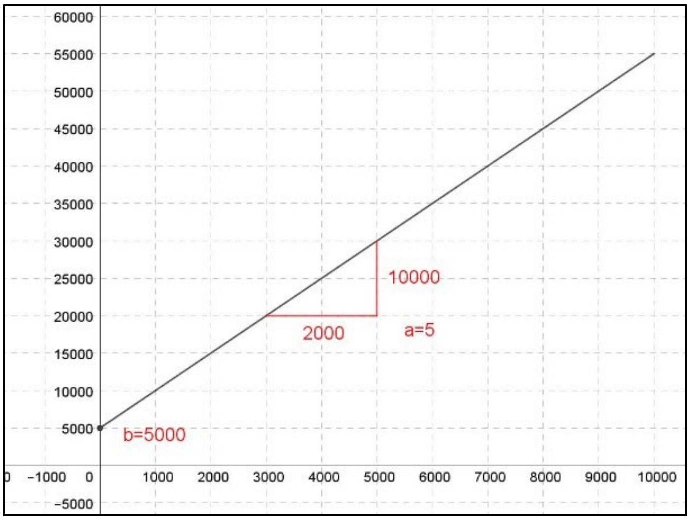


Stigningstallet kan også være negativt. Hvis vi f. eks har uttrykket

$y = -2x + 2$

så vil stigningstallet være -2 som betyr at når vi øker x med 1 så synker grafen med -2.

I tilfeller der vi har store x verdier er det upraktisk å bare øke x med én enhet. La oss se på grafen under. Dette kan være grafen som viser kostnadene for å produsere en bestemt vare. Vi ser at om vi ikke produserer noe har vi 5000 kroner i utgifter. Dette kan være faste utgifter som leie av lokaler, leie av maskiner etc. I tillegg har vi utgifter for hver vare vi produserer. Fra grafen ser vi at maks kapasitet per dag er 10 000 enheter.



Når vi skal finne stigningstallet grafisk er det upraktisk å bare øke x med 1, da det blir veldig smått og vanskelig å lese av. I eksempelet vårt har vi økt x med 2000, altså fra 3000 til 5000 enheter. Vi ser at det gir en økt kostnad på 10 000 kroner. Stigningstallet blir med andre ord

$$a = \frac{10000}{2000} = 5$$

slik at funksjonen vår blir

$$y = 5x + 5000$$

1.2 Fra funksjonsuttrykk til graf

Vi skal se på hvordan vi kan ta utgangspunkt i et funksjonsuttrykk og bruke det til å tegne opp en graf, der vi tar utgangspunkt i punkter som grafen går igjennom

Eksempel 1

Vi skal ta utgangspunkt i funksjonen

$$y = 2x + 1$$

Det første vi skal gjøre er å lage en tabell der vi finner tre punkter som grafen går gjennom. Strengt tatt er det nok med to punkter, men det er greit å ta med tre punkter for å minke risikoen for å regne feil. Det vi skal gjøre er å velge oss noen verdier for x for deretter å regne ut tilhørende y verdi. Hvilke x verdier vi velger har ikke så mye å si, men det er alltid greit å velge noen enkle tall i oppgaver som dette. Vi skal velge $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$.

$x = 0$: $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ som gir punktet $(0,1)$

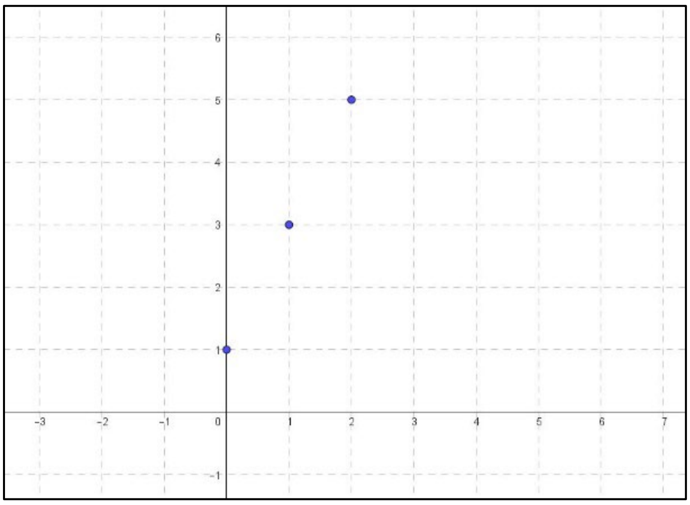
$x = 1$: $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ som gir punktet $(1,3)$

$x = 2$: $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ som gir punktet $(2,5)$

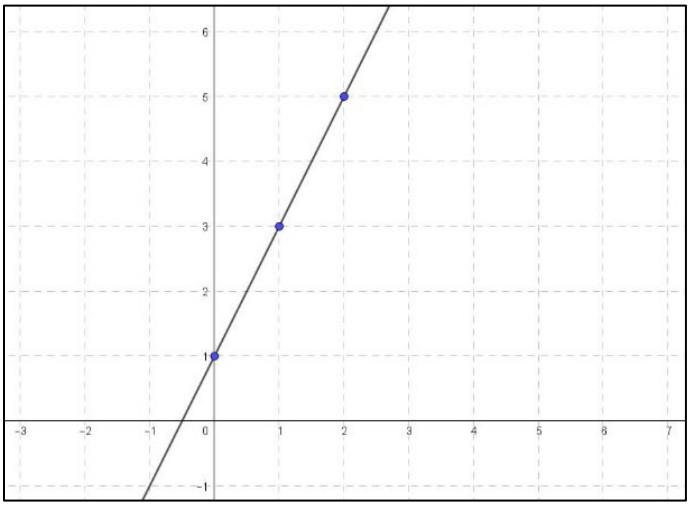
Vi kan presentere dette i en tabell på denne måten:

x	0	1	2
y	1	3	5

Når vi har disse punktene, kan vi plotte dem inn i et koordinatsystem.



Vi ser her at de tre punktene vi har tegnet inn ligger på en rett linje. Det neste vi skal gjøre er å tegne inn en rett linje som går gjennom disse punktene.

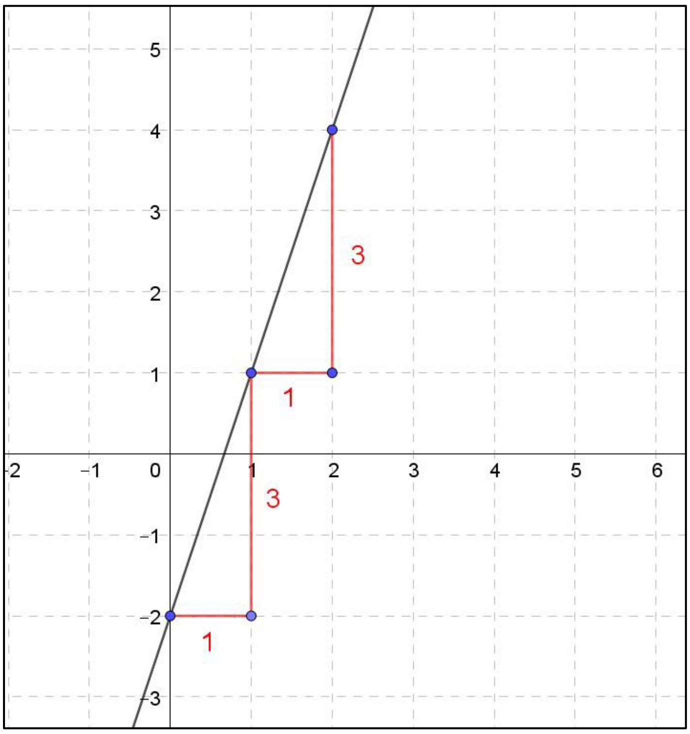


La oss se på et eksempel til. Denne gang skal vi imidlertid tegne opp grafen uten å gå veien om å lage tabell. Vi skal kun bruke koeffisientene a og b.

Eksempel 2

Vi skal tegne opp grafen til funksjonen $y = 3x - 2$

Her ser vi at grafen skjærer y-aksen i punktet $(0, -2)$. Vi starter med å tegne opp dette punktet. Vi vet videre at stigningstallet er 3. Det betyr at om vi øker x med 1 så vil y øke med 3. Det gir oss punktet $(1,1)$. Videre ser vi at om vi øker x med 1 enhet til vil y øke med ytterligere 3. Det gir oss punktet $(2,4)$. Dette kan fremstilles grafisk som vist under.



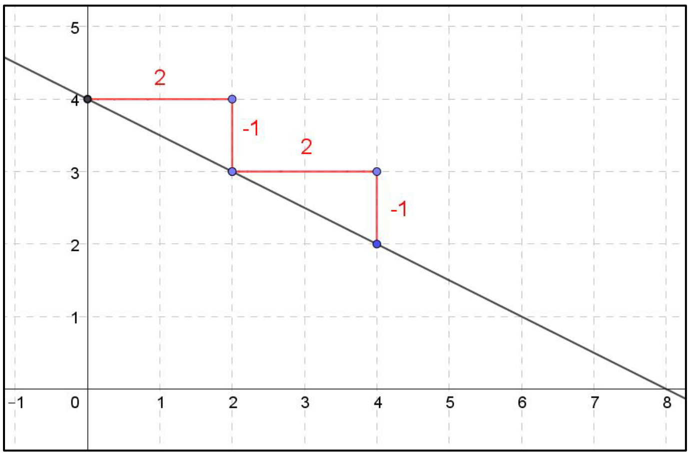
I de to eksemplene vi har sett på hittil så har stigningstallet vært positivt. Det er selvsagt ingenting i veien for at vi har et negativt stigningstall. La oss se på et eksempel

Eksempel 3

Vi skal tegne opp grafen til funksjonen

$y = -0{,}5x + 4$

Her ser vi at stigningstallet er negativt, samtidig som det heller ikke er et heltall. Vi kan tegne grafen både med metoden fra eksempel 1, der vi laget tabell, eller ved å bruke samme teknikk som i eksempel 2. Vi ser på metoden uten bruk av tabell først. Vi ser av funksjonsutrykket at grafen går igjennom punktet $(0{,}4)$. Videre ser vi at om vi øker x med 1 vil y minke med 0,5. Vi ser at om vi øker x med 2 så vil y minke med 1 slik at vi får punktet $(2{,}3)$. Om vi øker x med ytterligere 2 vil vi få punktet $(4{,}2)$. Grafisk får vi dette



Vi kan som sagt også lage en tabell. Vi velger $x = 0$, $x = 2$ og $x = 4$. Vi velger x verdier som er partall slik at vi slipper å få y verdier som er desimaltall.

$x = 0$: $\quad y = -0{,}5 \cdot 0 + 4 = 1$ som gir punktet $(0{,}4)$

$x = 2$: $\quad y = -0{,}5 \cdot 2 + 4 = 3$ som gir punktet $(2{,}3)$

$x = 4$: $\quad y = -0{,}5 \cdot 4 + 4 = 2$ som gir punktet $(4{,}2)$

Vi kan presentere dette i en tabell.

x	0	2	4
y	4	3	2

Når vi har disse punktene, kan vi plotte dem inn i et koordinatsystem. Grafen blir naturligvis den samme som vist tidligere i eksempelet.

I disse eksemplene brukte vi små x-verdier. Vi ser at det fungerte greit for å få tegnet grafen. Generelt må vi bruke litt sunn fornuft når vi velger punkter, da lave x verdier ikke alltid er så lurt å bruke. La oss se på et eksempel.

Eksempel 4

En bedrift produserer en vare. De har 20 000 kroner i faste utgifter per uke. Kostnaden for hver vare er 15 kroner. De har kapasitet til å produsere 6 000 enheter per uke. Vi er interessert i de ukentlige kostnadene når vi produserer x antall enheter. Dette kan skrives som

$K(x) = 15x + 20000$

Vi skal tegne grafen. Det gir ikke mening å velge x-verdier fra 0 til 4 som vi gjorde i sted, siden bedriften har kapasitet til å produsere 6000 enheter i uken. Rent matematisk går det fint, men grafen vil bli veldig unøyaktig. I dette tilfellet er det bedre å velge x verdier på f. eks 0, 3000 og 6000, som samsvarer bedre med kapasiteten til maskinen. Gjør vi dette kan vi sette opp følgende tabell

$x = 0$: $K = 15 \cdot 0 + 20000 = 20000$ som gir punktet $(0{,}20000)$

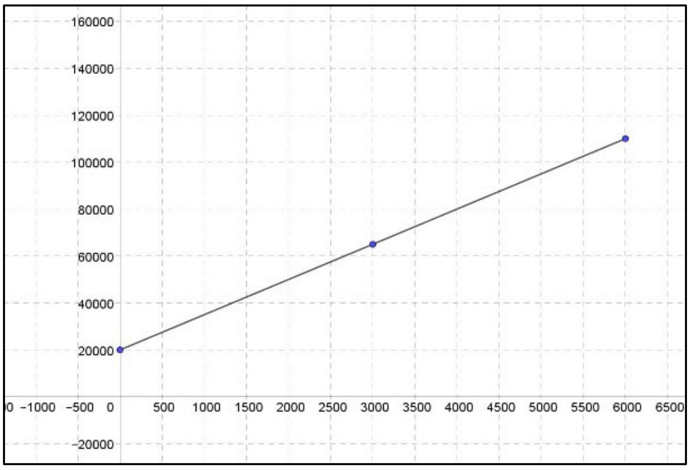
$x = 3000$: $K = 15 \cdot 3000 + 20000 = 65000$ som gir punktet $(3000{,}65000)$

$x = 6000$: $K = 15 \cdot 6000 + 20000 = 110000$ som gir punktet $(6000{,}110000)$

Vi kan presentere dette i en tabell

x	0	3000	60000
$K(x)$	2000	65000	110000

Grafen vil se ut som vist under



1.3 To likninger med to ukjente

Flere av eksemplene og oppgavene i heftet involverer to likninger med to ukjente. Disse likningene kan løses på flere måter. De mest vanlige metodene er innsettingsmetoden og addisjonsmetoden. Vi skal ikke gjennomgå disse metodene i dette heftet, men heller henvise til et eget heftet der dette blir gjennomgått i detalj. Her er det også et kapittel som drøfter hvilken metode som er mest hensiktsmessig i de forskjellige situasjonene. Heftet finner dere i lenken under

https://web01.usn.no/~panderse/notater/Likningssystemer.pdf

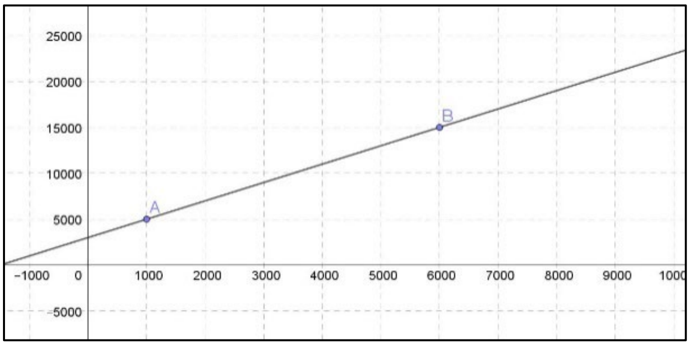
Innsettingsmetoden behandles i kapittel 3 og addisjonsmetoden i kapittel 4. Sammenlikning av metodene er behandlet i kapittel 5.

1.4 Fra graf til funksjon

Ofte har vi en problemstilling der vi skal finne funksjonsuttrykket til en graf som er kjent. Er det pene tall der stigningstallet a og skjæring med y aksen er lett å lese av, er det som oftest ganske enkelt. I dette eksempelet skal vi se på en situasjon der vi har ganske store tall og der det er vanskelig å lese av nøyaktig.

Eksempel 5

Vi skal se på grafen som er vist under



Her ser vi ikke uten videre verdien til b. Vi ser imidlertid at grafen går gjennom to punkter som kan hjelpe oss litt. Det er flere måter å løse denne på. Vi ser på to av dem.

Metode 1

Vi ser at grafen går gjennom punktene $(1000, 5000)$ og $(6000,15000)$. Dette kan vi utnytte ved å sette opp to likninger med to ukjente. Vi tar utgangspunkt i den generelle formelen $y = ax + b$

$x = 1000$ og $y = 5000$: $\quad 5000 = 1000a + b \quad$ (I)

$x = 6000$ og $y = 15000$: $\quad 15000 = 6000a + b \quad$ (II)

Vi tar likning (II) og trekker fra likning (I). Poenget med denne metoden er vi legger sammen eller trekker fra venstre side i ligning (I) med venstre side i ligning (II). Vi gjør det samme på høyre side. La oss se hva som skjer når vi tar ligning (II) minus ligning (I). Vi kan gjøre dette siden venstre side i likning (I) er lik høyre side i likning (I).

Det gir oss

$15000 - 5000 = 6000a + b - (1000a - b)$ (II)-(I)

$10000 = 5000a$ (II)-(I)

Som gir oss at $a = 2$

Denne verdien kan vi sette inn i f. eks likning 1. Det gir oss

$5000 = 1000 \cdot 2 + b$ (I)

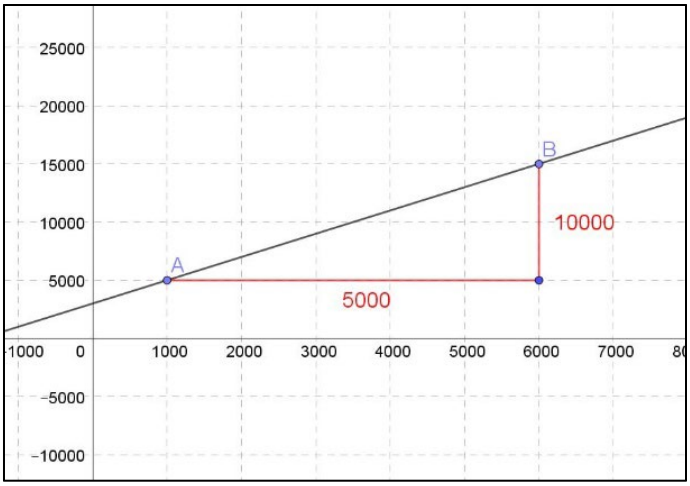
Som igjen gir oss at $b = 3000$.

Funksjonen blir altså

$y = 2x + 3000$

Metode 2

I dette tilfellet kan vi enkelt lese av stigningstallet fra grafen. Se figur under. Det er ikke alltid det er like enkelt, men her går det fint.



Vi ser at stigningstallet blir $\frac{10000}{5000} = 2$

Da har vi likningen $y = 2x + b$

For å finne b kan vi sette inn verdiene fra punktet $(1000{,}5000)$ i likningen. Vi kunne naturligvis også brukt det andre punktet. Svaret ville blitt det samme. Det gir oss

$5000 = 2 \cdot 1000 + b$

Og dermed at $b = 3000$. Likningen blir da

$y = 2x + 3000$

Vi ser at vi får samme likning som ved å bruke metode 1.

2 Ettpunktsformelen og topunktsformelen

Det er en del som er vant til å bruke det vi kaller ettpunktsformelen og topunktsformelen for å finne funksjonsuttrykket til en graf. Dette er formler *vi* aldri bruker, og vi vil også advare leseren om å bruke dem. Disse formlene er basert på å huske formelen og sette inn riktige tall. Det fremmer ikke forståelse for hvordan en skal tenke for å løse en oppgave. Når vi likevel tar dem med her, er det fordi mange er vant til å bruke dem. Skal disse benyttes med elever, må en fullstendig forståelse av fremgangsmåten ligge til grunn.

Ettpunktsformelen

Det ettpunktsformelen bygger på at vi kjenner stigningstallet og ett av punktene (x_1, y_1) som grafen går gjennom. Ettpunktsformelen kan skrives på formen

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Denne formelen er ganske enkel å utlede.

Vi tar utgangspunkt i formelen

$$y = ax + b \qquad \text{(I)}$$

Så erstatter vi x og y med x_1 og y_1

Det gir oss

$$y_1 = ax_1 + b \qquad \text{(II)}$$

Vi tar så likning (I) og trekker fra likning (II). Det gir oss

$$y - y_1 = ax - ax_1$$

som igjen gir oss ettpunktsformelen

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Formelen er ganske enkel å bruke. La oss se på et eksempel.

<u>Eksempel 6</u>

Vi har en funksjon med stigningstall 2 og som går gjennom punktet $(2,1)$. Vi skal finne funksjonsuttrykket.

Vi får da

$$y - 1 = 2(x - 2)$$

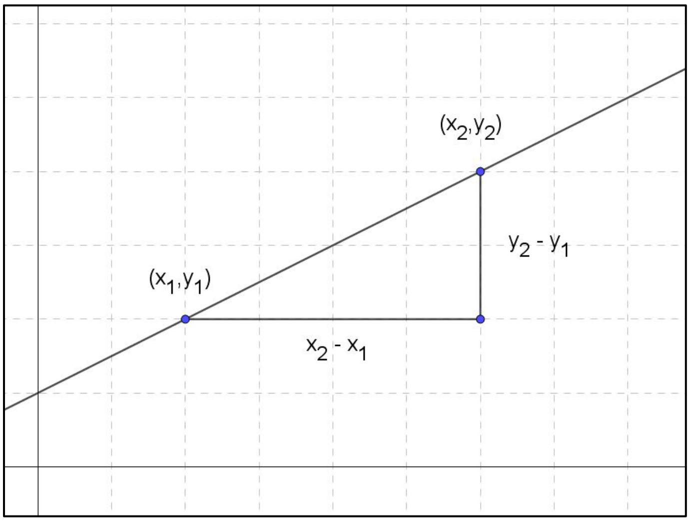
$$y = 2x - 3$$

Topunktsformelen

Vi skal nå se nærmere på topunktsformelen. Det er en formel som gir oss funksjonsuttrykket når vi kjenner to punkter. Den kan uttrykkes som vist under.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

der ene punktet er (x_1, y_1) og det andre er (x_2, y_2). Vi kan vise denne på flere måter. Et alternativ er å ta utgangspunkt i de to punktene og finne stigningstallet. Det kan vi gjøre ved hjelp av en figur. Når vi har funnet stigningstallet, setter vi punktene og stigningstallet inn i ettpunktsformelen. Stigningstallet finner vi fra figuren under



$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Setter vi dette inn i ettpunktsformelen finner vi uttrykket over for topunktsformelen

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Det gir lite mening i å huske denne formelen. Det fremmer som sagt lite forståelse, med mindre man har elevene med i prosessen. Det krever høy algebraisk forståelse for å henge med her. Vi anbefaler å heller velge en av fremgangsmåtene som er vist tidligere i heftet. Vi ser allikevel på et eksempel med bruk av topunktsformelen.

Eksempel 7

En funksjon går gjennom punktet $(-2, -1)$ og $(3,4)$. Vi skal finne funksjonsuttrykket.

Vi setter verdiene fra koordinatene inn i topunktsformelen

$$y - (-1) = \frac{4 - (-1)}{3 - (-2)}\big(x - (-2)\big)$$

$$y + 1 = \frac{5}{5}(x + 2)$$

$$y + 1 = x + 2$$

$$y = x + 1$$

3 Praktiske eksempler

I dette avsnittet skal vi se på noen praktiske situasjoner der vi bruker lineære funksjoner. Vi skal se på eksempler der vi går fra funksjon til graf og bruker dette til å løse ulike oppgaver. Vi skal også se på situasjoner der vi bruker grafen til å finne et funksjonsuttrykk. Vi starter med et forholdsvis enkelt eksempel.

<u>Eksempel 8</u>

En klasse på 29 elever har vunnet 13 000 kroner i en TV konkurranse. Disse pengene ønsker klassen å bruke på en klassetur. Til klasseturen skal de leie en buss som koster 4000 kroner. Overnatting og mat koster 350 kroner for hver person. Klassen skal være borte én natt.

a) Hvor mye vil det koste for klassen hvis 25 av elevene i klassen skal være med på turen?

b) Finn et funksjonsuttrykk som viser hva turen koster for klassen hvis x elever skal være med på turen.

c) Tegn grafen til funksjonen du fant i b)

d) Bruk grafen til å finne hvor mye penger klassen mangler dersom hele klassen skal være med på turen. Hvor mye må hver av elevene betale ekstra?

<u>Løsning</u>

a) I det første spørsmålet skal vi kun finne ut hva turen koster per elev dersom 25 elever deltar. Vi kan enkelt regne ut hva turen koster til sammen for 25 elever.

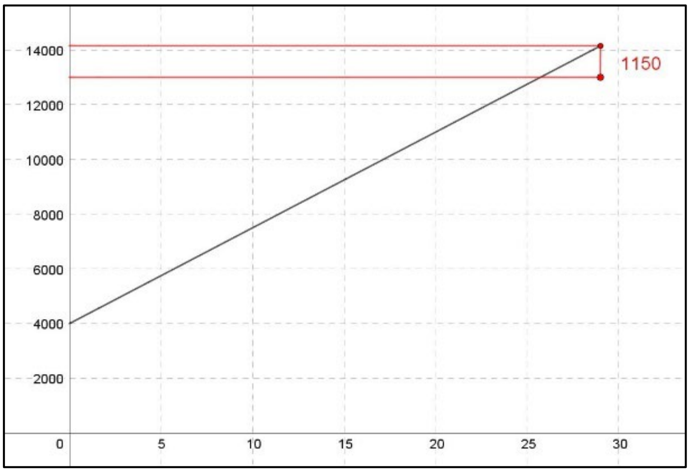
   $350 \cdot 25 + 4000 = 12750$ kroner.

   Merk her at prisen for bussen er den samme, uavhengig av hvor mange som skal være med. Kostnadene for overnatting og mat øker derimot med antall elever.

b) I dette spørsmålet skal vi finne et funksjonsuttrykk. Vi kan følge samme tankegang som i a) bare at vi bytter ut 25 med x. Da får vi

   $y = 350x + 4000$

c) Under er grafen tegnet inn. Vi har også markert hvor mange kroner klassen mangler



d) Vi legger merke til at det ikke gir mening å bruke negative x verdier i denne oppgaven. Vi trenger heller ikke tegne grafen lenger enn for $x = 29$ siden det er antall elever i klassen. Vi ser av grafen at vi mangler 1150 kroner dersom hele klassen skal være med. Dette utgjør

$$\frac{1150}{29} = 39{,}66$$

Merk at det kan være vanskelig å lese av nøyaktig, da tallene vi forholder oss til her er ganske store. Vi kan også finne svaret ved regning. Vi ser da på hva turen koster for alle 29 elevene.

$$350 \cdot 29 + 4000 = 14150 \text{ kroner}$$

Siden vi har 13 000 kroner, vil differansen bli 1150 kroner slik grafen viser.

Eksempel 9

Erica Faxe benytter seg ofte av taxi på dagtid. De turene hun som oftest tar, er hjemmefra til kontoret og fra kontoret til flyplassen. For turen hjemmefra til kontoret betaler hun vanligvis 140 kroner. Denne distansen er 5 km. Når hun reiser til flyplassen fra kontoret, betaler hun normalt 224 kroner. Avstanden til flyplassen er 12 km. Taxiselskapet opplyser at de har en fast startpris samt at de tar betalt per km de kjører.

a) Lag en graf som viser sammenhengen mellom hvor langt du kjører og prisen du betaler.

b) Bruk grafen til å finne hva en taxitur på 10 km vil koste. Finn også hvor langt du kommer for 260 kroner.

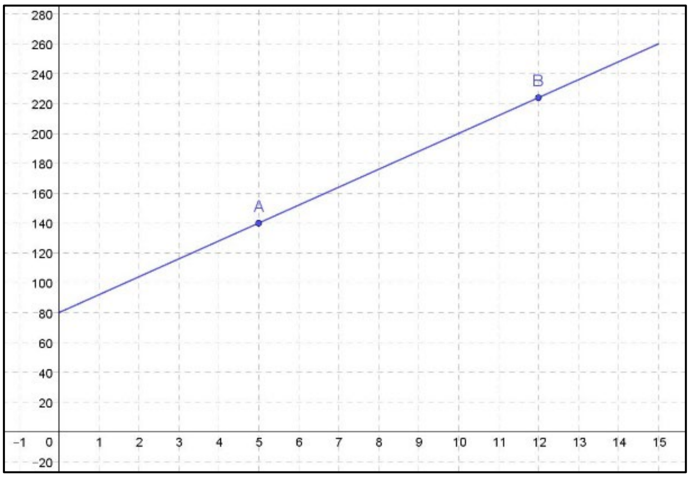
c) Finn et funksjonsuttrykk som gir kostnaden som funksjon av antall km.

d) Finn svarene på oppgave b) ved regning.

e) Taxiselskaper opererer ofte med en minstepris. I vårt tilfelle er minsteprisen 128 kroner. Tegn opp grafen som viser sammenheng mellom antall km og kostnader i dette tilfellet.

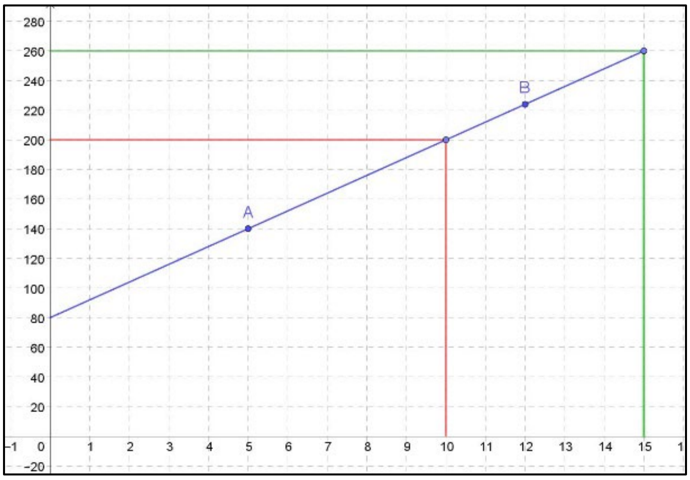
Løsning

a) Her kjenner vi verken skjæring med y-aksen eller stigningstallet. Vi kan derfor ikke bruke noen av de vanlige teknikkene. Det som er lurt å gjøre er å tegne inn de punktene vi kjenner i et diagram og se om det kan hjelpe oss videre. Vi har opplysninger om at gafen vil gå gjennom punktene $(5{,}140)$ og $(12{,}224)$. Vi trekker deretter en linje mellom punktene.



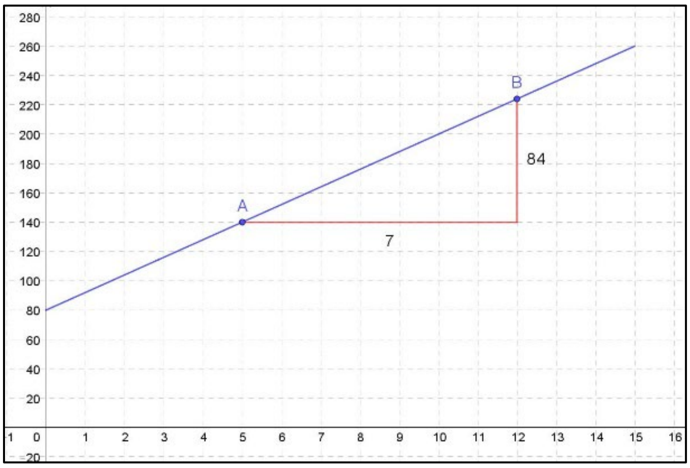
Legg merke til at grafen starter i $x = 0$ da det ikke gir mening å snakke om negative km. Vi har tegnet den til 15 km, men det er egentlig ikke noen øvre begrensning.

b) Vi bruker grafen vår og tegner inn en linje for $x = 10$ og ser hvor den først treffer grafen og deretter ser vi hvilken y verdi dette tilsvarer. Det samme gjør vi for 260 kroner.



Vi ser ut fra grafen at om vi kjører 10 km kommer regningen på 200 kroner. Vi ser tilsvarende at om vi betaler 260 kroner så får vi kjørt 15 km.

c) Det er mange måter å løse denne på. Det enkleste er gjerne å bruke grafen. Fra før vet vi at lineære grafen er på formen $y = ax + b$ der a er stigningstallet og b er skjæring med y aksen. Verdiene til a og b finner vi lett med grafen.



Vi ser her at grafen skjærer y aksen i punktet $(0,80)$ slik at $b = 80$. Tilsvarende ser vi fra grafen at stigningstallet blir $84/7 = 12$. Dermed blir funksjonsuttrykket

$y = 12x + 80$

Vi kunne også løst oppgaven ved å sette opp to likninger med to ukjente, men dette er noe tungvint. Vi tar det allikevel med, for de spesielt interesserte. Vi setter da verdier fra punktene $(5,140)$ og $(12,244)$ inn i likningen $y = ax + b$. Dette gir oss to likninger med to ukjente

$140 = 5a + b$ (i)
$224 = 12a + b$ (ii)

Vi tar så likning (ii) og trekker fra likning (i)

$224 = 12a + b$ (ii)
$140 = 5a + b$ (i)

$84 = 7a$ (ii)-(i)

$a = 12$

Verdien til b finner vi ved å putte verdien for a inn i f. eks likning (i)

$140 = 5 \cdot 12 + b$

$b = 80$

Vi ser vi får samme svar som i sted.

d) Det enkleste er å finne hva turen koster for 10 km. Du erstatter ganske enkelt x med 10 i funksjonsutrykket. Det gir oss

$y = 12 \cdot 10 + 80 = 200$

Hvis vi vet hva turen koster, kjenner vi jo y-verdien, men ikke x-verdien. Kjører vi for 260 kroner så erstatter vi y med 260. Det gir oss

$260 = 12x + 80$

$12x = 260 - 80$

$12x = 180$

$x = 15$

e) Vi må først finne det punktet der vi har overgangen mellom minstepris og der prisen begynner å stige per km. Vi kan sette inn 128 (minsteprisen) for y i funksjonen for å finne dette punktet.

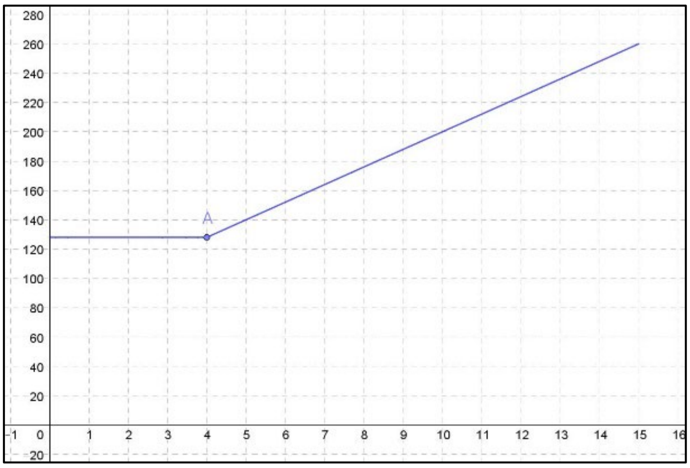
$128 = 12x + 80$

$12x = 128 - 80$

$12x = 48$

$x = 4$

Vi ser at så lenge vi kjører 4 km eller mindre må vi betale minsteprisen på 128 kroner. Grafisk kan dette illustreres med en rett linje på formen $y = 128$. Definisjonsmengden blir her $[0,4]$, eller på godt norsk, så bruker vi denne funksjonen mellom 0 og 4 km. Fra 4 km og oppover bruker vi funksjonen vi fant i c. Det gir oss da følgende graf



I noen tilfeller vil grafen egentlig bestå av flere deler slik som vist over. I eksempelet under skal vi se nærmere på det. Eksempelet inneholder en del opplysninger, men det gjelder å sortere ut det som er viktig for det enkelte spørsmål.

Eksempel 10

SAS har våren 2024 en daglig direkteavgang mellom Oslo og Alta. Vi skal i denne oppgave se på hvor høyt flyet flyr ved forskjellige tidspunkt på en spesiell avgang. Fra SAS sin webside, samt andre kilder, kan vi hente ut følgende opplysninger om flyturen fra Oslo til Alta: (NB. I praksis kan tallene variere litt fra flytur til flytur grunnet vær og trafikk, men tallene vi bruker er ganske normale for en vanlig flyreise)

- Flyet starter klokken 11.30 fra Oslo og bruker 2 timer på turen.
- Etter at flyet har tatt av, stiger det med 1500 fot i minuttet.
- Flyet flyr i en marsjhøyde på 41 000 fot.
- Under nedstigningen synker flyet med 1800 fot i minuttet.

a) Hvor lang tid vil flyet bruke på å nå marsjhøyden på 41 000 fot?

b) Finn tidspunktet for når flyet skal starte på nedstigningen mot Alta?

c) Finn en funksjon som viser sammenhengen mellom høyden til flyet og tiden flyet har fløyet. Tegn også grafen til funksjonen.

d) Dessverre viste det seg at det vår tåke på Alta lufthavn, slik at flyet ikke kunne lande. Flyet fikk beskjed om å kretse over Alta i 8000 fot, i håp om at tåken skulle forsvinne. Etter at flyet hadde kretset over Alta i 30 minutter forsvant tåken, og flyet fikk beskjed om at det kunne lande. Lag en skisse av grafen til funksjonen, som viser sammenhengen mellom høyden til flyet og tiden det har fløyet.

Løsning

a) Vi ser at vi i spørsmål a) skal vi finne ut hvor lang tid flyet bruker før det når marsjhøyden på 41 000 fot. Vi forutsetter her at flyet stiger jevnt. I virkeligheten stiger det gjerne brattere i starten, før det flater ut, og i noen tilfeller flater det helt ut underveis før det fortsetter å stige f. eks på grunn av annen trafikk. Dette tar vi ikke hensyn til i dette eksempelet.

   For å finne tiden det tar, deler vi 41 000 på hvor fort det stiger, som er 1500 fot i minuttet. Dette gir oss

   $$t = \frac{41000}{1500} = 27{,}333333\ldots$$

   minutter. Vi bør her gjøre desimaldelen om til sekunder. Vi ser at desimaldelen er $1/3$ og at $1/3$ av 60 sekunder er 20 sekunder. Tiden det tar før flyet når marsjhøyde er med andre ord 27 minutter og 20 sekunder.

b) Vi må først finne ut hvor lag tid flyet bruker på nedstigningen. Også her forutsetter vi at det synker med jevn hastighet, som er 1800 fot i minuttet. Det betyr at flyet bruker

   $$t = \frac{41000}{1800} = 22{,}777777\ldots$$

   Gjør vi om dette til sekunder får vi først $0{,}7777777\ldots . = \frac{7}{9}$. (I lenken https://www.matematikk.org/oss.html?tid=89538 er det forklart hvordan vi kan gjøre om et periodisk desimaltall til brøk) Dette ganger vi med 60 som gir oss antall sekunder $60 \cdot \frac{7}{9} = \frac{420}{9} = \frac{140}{3} = 46{,}66666\ldots.$ (I praktisk matematikk kunne en også tatt $0{,}78 \cdot 60 = 46{,}8$) Avrunder vi dette får vi 47 sekunder. Flyet starter altså nedstigningen 22 minutter og 47 sekunder før det lander. Siden vi vet at flyet bruker 120 minutter fra det starter til det lander så må nedstigningen starte klokken 12:07:13

c) Dette blir det vi kaller en delt forskrift. Vi må altså ha en funksjon for oppstigningen, en når det flyr i marsjhøyde og en for nedstigningen.

   Oppstigning: Her vet vi at flyet stiger med 1500 fot i minutter. Det gjør det i 27 minutter og 20 sekunder. Det gir oss

$h(t) = 1500\,t \qquad\qquad 0 \leq t \leq 27{,}33$

Marsjhøyde: Her flyr flyet med konstant høyde på 41 000 fot. Det gir oss

$h(t) = 41000 \qquad\qquad 27{,}33 \leq t \leq 97{,}22$

Nedstigning: Vi vet at stigningstallet er -1800, men vi vet ikke når den skjærer y aksen. Det enkleste er å bruke formelen for en rett linje og sette inn det vi har av kjente verdier. Vi kjenner som sagt at $a = -1800$. Vi vet også at når $t = 120$ så er $y = 0$ siden flyet da er på bakken igjen. Vi setter dette inn i likningen $h(t) = at + b$. Det gir oss

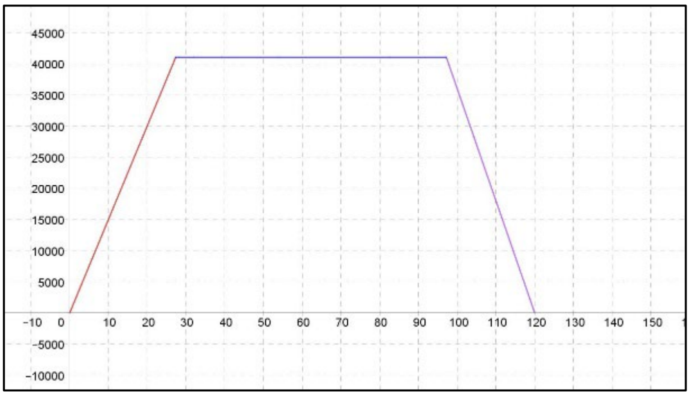
$0 = -1800 \cdot 120 + b$

$b = 216000$

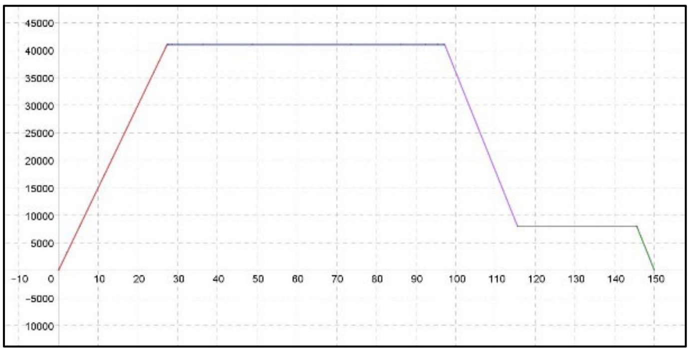
Funksjonen blir derfor

$h(t) = -1800t + 216000 \qquad 97{,}22 \leq t \leq 120$

Grafen til funksjonen vil se ut som vist under



d) Vi skal lage en skisse av grafen når flyet får beskjed om å kretse i 8000 fot i 30 minutter før landing. Merk at det her spørres om en skisse og ikke nøyaktig tegning av graf. Når det er en skisse så trenger du ikke regne ut eksakte verdien, men kun tegne opp en graf som har noenlunde lik form som den virkelige grafen har. I vårt tilfelle vil grafen se ut som vist under.



Eksempel 11

I dette eksempelet skal vi se nærmere på bompengeprisene i Kongsberg. I 2024 koster en enkelt passering 35,20 kroner, dersom du har autopassbrikke. Vi legger i resten av eksempelet til grunn, at vi har autopassbrikke. Det er et passeringstak på 40 turer. Det vil si at etter du har kjørt gjennom bommen 40 ganger i løpet av en måned, trenger du ikke betale mer den måneden. Vi skal finne en funksjon som viser kostnadene av bompenger når vi passerer bommen x antall ganger. Vi skal også tegne grafen.

Løsning

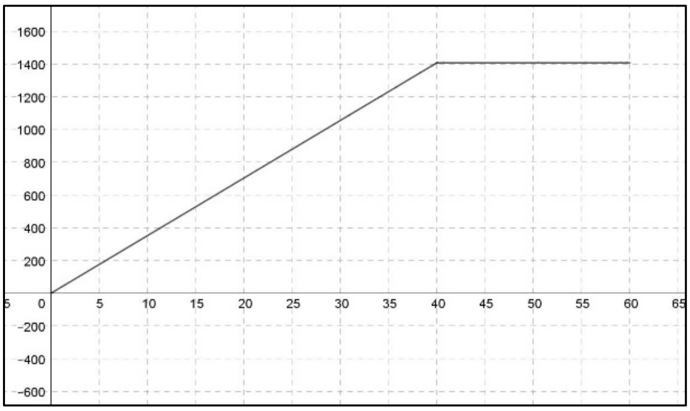
I utgangspunktet er dette lett. Kostnadene våre øker proporsjonalt med antall passeringer. Men dette gjelder kun opp til 40 passeringer. Deretter betaler vi ikke noe mer, og kostnadene er akkurat de samme om vi passerer bommen 40 ganger eller 50 ganger. Vi må med andre ord dele opp funksjonen i to. En som gjelder opp til og med 40 passeringer og en som gjelder fra 41 og oppover. Funksjonen som vi bruker til og med 40 blir

$$f(x) = 35{,}2x \qquad 0 \leq x \leq 40$$

Når vi har passert 40 ganger blir utgiftene våre $35{,}2 \cdot 40 = 1408$ kroner. Det medfører at funksjonen i dette tilfelle blir

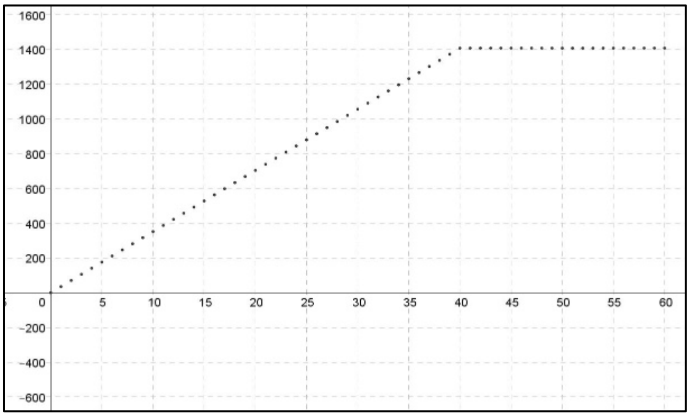
$$f(x) = 1408 \qquad x \geq 41$$

Grafen vil se ut som vist under



Hverken funksjonsuttrykk eller grafen er helt riktige her. Ser du hva som er problemet?

Utfordringen her er at antall passeringer er et heltall. Enten passerer vi bommen eller ikke. Vi kan liksom ikke passere den en halv gang eller en tredjedelsgang etc. Skal vi være litt pirkete her, så skulle grafen sett ut som vist under



Som vi ser, så består grafen bare av punkter og ikke noen linje mellom punktene. Dette er tungvint å lage og regne på. Derfor vil en i de fleste praktiske situasjoner gjøre som vi gjorde innledningsvis, nemlig å finne funksjonsuttrykket for funksjonen og tegne opp grafen som er i samsvar med funksjonen, selv om dette strengt tatt ikke er helt korrekt.

4 Oppgaver

4.1 Oppgaver til kapittel 1

Oppgave 1

Vi har gitt funksjonen

$y = x - 2$

Lag en tabell og tegn opp grafen til funksjonen.

Oppgave 2

Vi ar gitt funksjonen

$y = -0{,}5x + 2$

Lag en tabell og tegn opp grafen til funksjonen.

Oppgave 3

Vi har gitt funksjonen

$y = -2x + 4$

Tegn opp grafen uten å lage tabell, dvs. at du kun skal bruke koeffisientene a og b

Oppgave 4

Vi har gitt funksjonen

$y = 300x + 2000$

Tegn opp grafen til funksjonen. Verdien til x er mellom 0 og 100

4.2 Oppgaver til kapittel 3

Oppgave 5

Vi skal i denne oppgaven se på sammenhengen mellom Celsius- og Fahrenheitgrader. Sammenhengen er lineær, og vi vet at 0^oC tilsvarer 32^oF og at 100^oC tilsvarer 212^oF.

a) Tegn opp grafen til funksjonen i et koordinatsystem.

b) Finn en funksjon som gir antall grader Fahrenheit når antall grader Celsius er kjent.

c) Finn ut ifra grafen hvor mange grader Fahrenheit 50^oC tilsvarer. Finn også hvor mange grader Celsius 200^oF tilsvarer.

d) Finn ved regning hvor mange grader Celsius 68^oF tilsvarer.

e) Ved en bestemt temperatur har vi samme antall grader Fahrenheit som Celsius. Finn denne temperaturen både grafisk og ved regning

Oppgave 6

Tabellen under viser Norges befolkning hvert tiår etter krigen. Folketallet er oppgitt i tusen. Det vil si du må gange tallet for befolkning med 1000.

År	1970	1980	1990	2000	2010	2020
Befolkning	3900	4100	4200	4500	4900	5400

Vi lar 1970 tilsvare at $x = 0$

a) Legg inn punktene i et koordinatsystem.

b) Disse punktene ligger ikke på en rett linje, men som vi ser stiger befolkningen likevel ganske jevnt opp gjennom årene. Trekk opp en linje slik at alle punktene ligger i nærheten av linjen. Bruk linjal. Metoden kalles ofte for *linjalmetoden*.

c) Finn en funksjon for linjen du har trukket opp. Dette blir ikke helt nøyaktig, siden du må lese av tallene i grafen. Hver obs på at du kan få et litt annen svar enn både fasit og andre studenter, siden ingen legger linjen helt likt.

d) Bruk modellen til å gi et anslag for hva befolkningen vil bli i 2030 og 2040.

e) Ser du noen svakheter med modellen?

PS: Dette er en oppgave som er velegnet til å løse i GeoGebra. I lenken under finner du et hefte om GeoGebra, hvor dette er beskrevet i detalj.

Lenke til GeoGebra-heftet

Regresjon er beskrevet i øvelse 6 på side 29.

Oppgave 7

En person, Tora Hansen, har inngått en avtale med et forlag om å skrive en lærebok. Boken skal ha en utsalgspris på 300 kroner. Forlaget og Hansen har blitt enige om at hun skal få et grunnhonorar på 15 000 kroner. Så lenge boken selger 500 eller færre eksemplarer får hun kun grunnhonoraret. Når salget overstiger 500 bøker får hun i tillegg 10% av utsalgsprisen for salget som overstiger 500 bøker.

a) Finn et funksjonsuttrykk som viser inntekten som funksjon av antall solgte bøker
b) Bruk funksjonen til å finne hva hun vil tjene dersom hun bare selger 250 bøker. Hva blir inntekten ved et salg på 750 bøker?
c) Tegn opp grafen til funksjonen.
d) Er det riktig å bruke en kontinuerlig funksjon i dette tilfellet?

5 Løsningsforslag

5.1 Fasit oppgaver til kapittel 1

<u>Oppgave 1</u>

Vi velger oss noen små x-verdier og lager en tabell. Det spiller ikke noe rolle hvilke x-verdier en velger, men siden funksjonen har små tall, lønner det seg å velge x-verdier som også er små. Vi bruker her at $x = 0$, $x = 2$ og $x = 4$

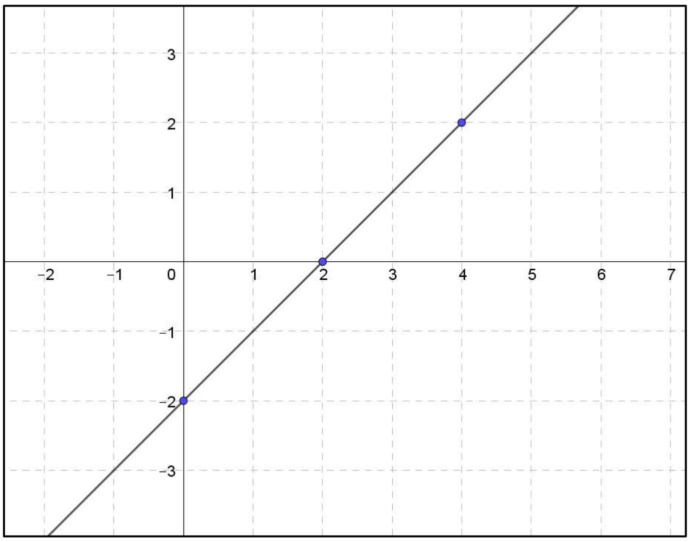
$x = 0$: $y = 0 - 2 = -2$ som gir punktet $(0, -2)$

$x = 2$: $y = 2 - 2 = 0$ som gir punktet $(2,0)$

$x = 4$: $y = 4 - 2 = 2$ som gir punktet $(4,2)$

Vi kan presentere dette i en tabell

x	0	2	4
y	-2	0	2



<u>Oppgave 2</u>

Vi velger oss noen små x-verdier og lager en tabell. Siden funksjonen vår er $y = -0{,}5x + 2$ kan det lønne seg å bruke partall for x, slik at vi unngår brøk. Vi bruker her at $x = 0$, $x = 2$ og $x = 4$

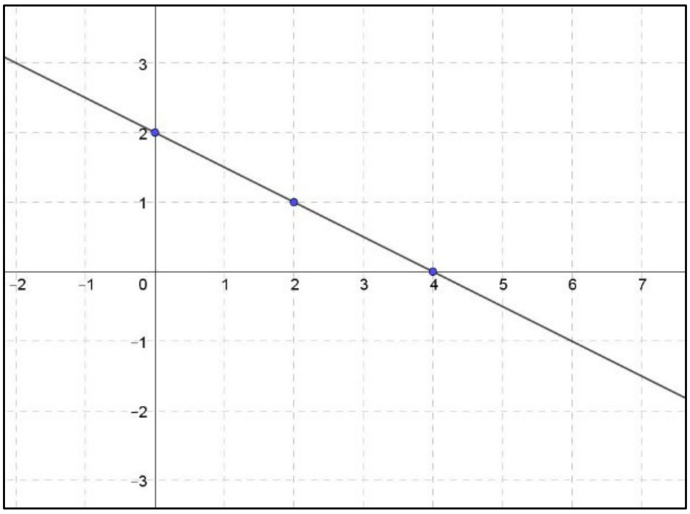
$x = 0$: $y = -0{,}5 \cdot 0 + 2 = 2$ som gir punktet $(0,2)$

$x = 2$: $y = -0{,}5 \cdot 2 + 2 = 3$ som gir punktet $(2,1)$

$x = 4$: $y = -0{,}5 \cdot 4 + 2 = 0$ som gir punktet $(4,0)$

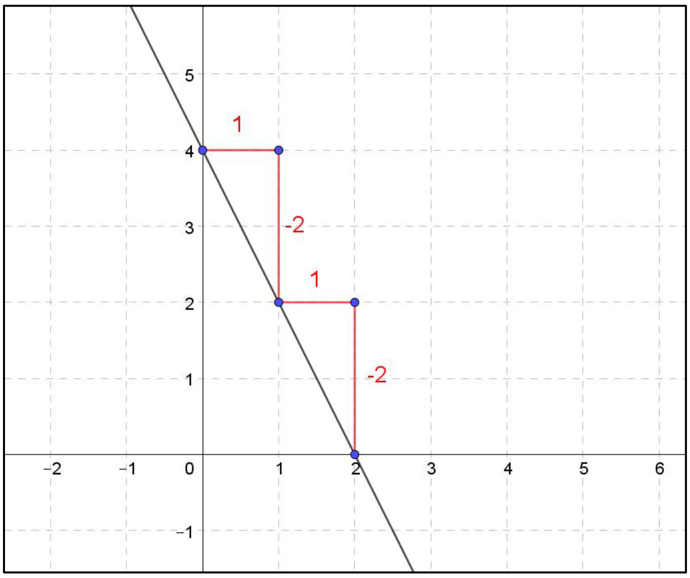
Vi kan presentere dette i en tabell

x	0	2	4
y	2	1	0



Oppgave 3

Vi ser her at $b = 4$ og at stigningstallet er -2. Det betyr at om vi øker x med 1, reduseres y med 2. Vi vet at grafen går gjennom punktet $(0,4)$ og det betyr også at den vil gå gjennom $(1,2)$ og $(2,0)$. Dette gir oss grafen under.



Oppgave 4

Vi ser at vi har ganske store tall her, og det vil derfor lønne seg å starte med $x = 0$, men for så velge større x-verdier. Vi vet at x-verdiene skal være fra 0 til 100 og gitt krysningspunktet med y-aksen vil y-verdiene være fra 2000 og oppover. Vi bruker her at $x = 0$, $x = 20$ og $x = 40$. En kan selvsagt også velge andre x-verdier.

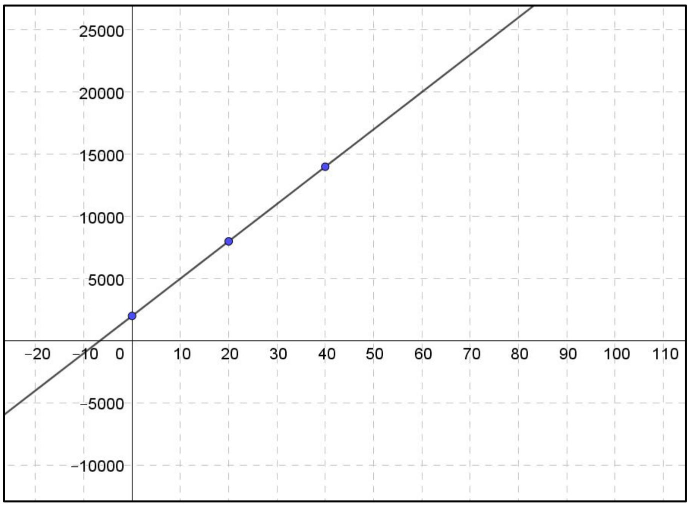
$x = 0$: $y = 300 \cdot 0 + 2000 = 2000$ som gir punktet $(0,2000)$

$x = 20$: $y = 300 \cdot 20 + 2000 = 8000$ som gir punktet $(20,8000)$

$x = 40$: $y = 300 \cdot 40 + 2000 = 14000$ som gir punktet $(40,14000)$

Vi kan presentere dette i en tabell på følgende måte:

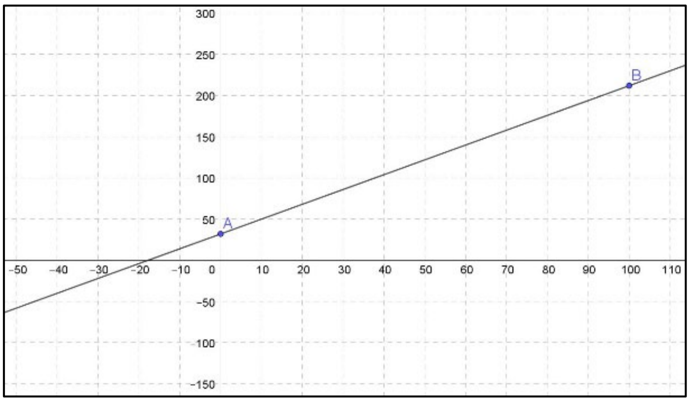
x	0	20	40
y	2000	8000	14000



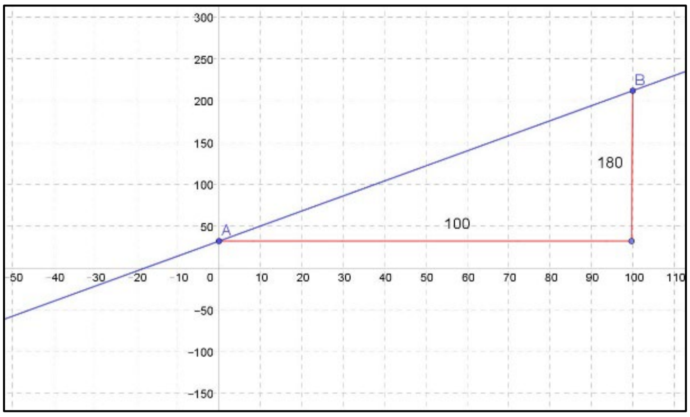
5.2 Fasit oppgaver til kapittel 3

<u>Oppgave 5</u>

a) Vi tegner opp punktene i et koordinatsystem og trekker en linje mellom dem.



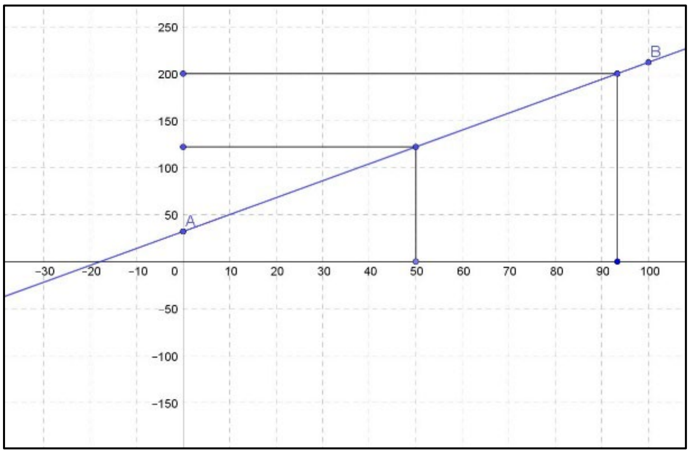
b) Vi kan finne funksjonen på flere måter. Her vet vi at når $x = 0$ så er $y = 32$, siden dette står angitt i oppgaven. Det medfører at $b = 32$. Vi kan også finne stigningstallet. Vi bruker grafen til dette



Vi ser ut fra figuren at det blir $180/100 = 1{,}8$. Med andre ord så er stigningstallet $a = 1{,}8$. Funksjonen blir altså

$y = 1{,}8x + 32$

c) Det er litt vanskelig å lese av helt nøyaktig, men vi finner at 50 grader Celsius tilsvarer omtrent 122 grader Fahrenheit og at 200 grader Fahrenheit tilsvarer om lag 93 grader Celsius. Se graf under



d) Vi setter inn $y = 68$ i funksjonen vår, som jo er antall grader Fahrenheit. Vi finner så x som er antall grader Celsius

$68 = 1{,}8x + 32$

$1{,}8x = 68 - 32$

$1{,}8x = 36$

$x = 20$

e) Ser vi på grafen vår, så ser vi at når temperaturen er rundt -40 grader så er den lik både i Celsius grader og Fahrenheitgrader. Det er vanskelig å lese nøyaktig av dette tallet, men rundt 40 ser riktig ut. La oss regne det ut for å få et nøyaktig svar. I dette tilfelle vil $y = x$ så vi erstatter y med x i funksjonsuttrykket

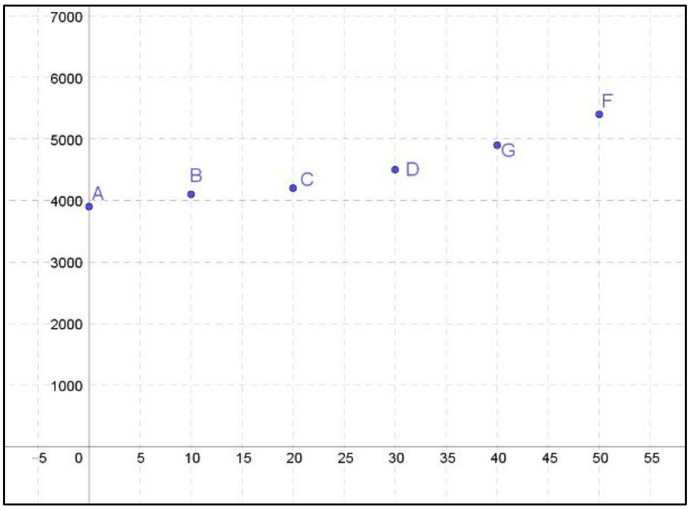
$x = 1{,}8x + 32$

$-0{,}8x = 32$

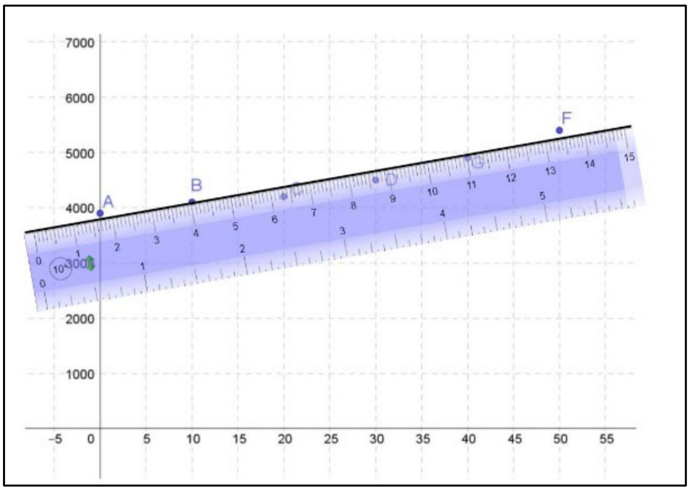
$x = -40$

Oppgave 6

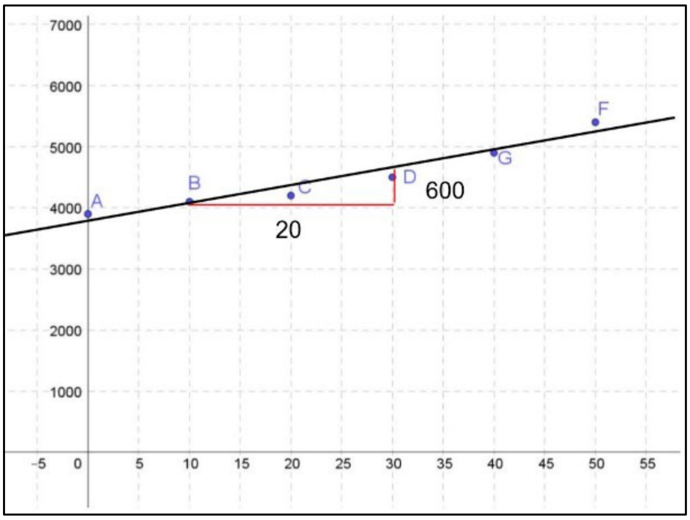
a) Punktene er vist i diagrammet under.



b) I figuren under har vi vist hvordan en linjal kan brukes for å trekke opp en rett linje som er tilpasset punktene.



c) Vi må bruke grafen til å lese av stigningstallet i skjæringen med y-aksen. Vi ser at skjæring med y-aksen er litt under 4000. Vi setter den til 3900. Med bruk av millimeterpapir kunne vi nok fått et litt mer nøyaktig tall. Stigningstallet finner vi ved å se på hvor fort grafen vokser. Vi kan bruke figuren under.



Vi ser at om vi øker x med 20 så stiger grafen med ca. 600. Det gir et stigningstall på $\frac{600}{20} = 30$. Funksjonen vår blir derfor

$$y = 30x + 3900$$

d) Når vi skal finne et anslag for 2030 setter vi inn $x = 60$. Det gir oss

$$y = 30 \cdot 60 + 3900 = 5700$$

Tilsvarende får vi for år 2040

$$y = 30 \cdot 70 + 3900 = 6000$$

e) Vi har ingen garantier for at veksten fortsetter på samme nivå som tidligere. Det kan være mange faktorer som spiller inn her som f. eks antall fødsler, at vi lever lenger at innvandringen kan bli større eller mindre enn i dag etc.

Oppgave 7

a) Vi får en funksjon for x-verdier til og med 500. Denne funksjonen blir

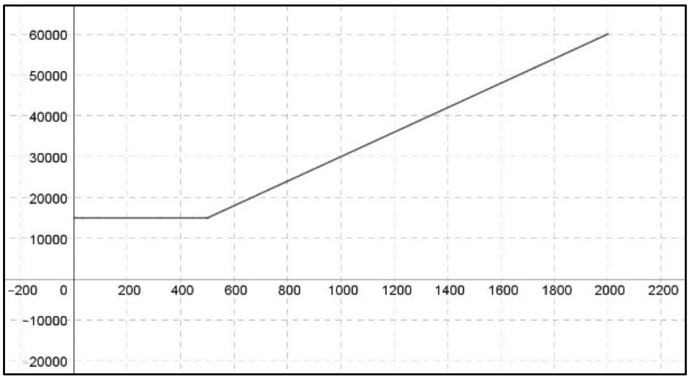
$$f(x) = 15000 \qquad 0 \leq x \leq 500$$

Når x er større enn 500 blir funksjonen

$$f(x) = 0{,}10 \cdot 300 = 30x \qquad x > 500$$

b) Hvis hun selger 250 bøker vi hun tjene grunnhonoraret på 15 000 kroner. Dersom hun selger 750 bøker, vil hun få utbetalt $30 \cdot 750 = 22500$ kroner.

c) Grafen vil se ut som vist på neste side.



d) Strengt tatt blir ikke dette helt riktig. Problemet er at vi kun selger hele bøker og ikke et desimaltall med bøker. Grafen skulle derfor egentlig vært et punktdiagram, slik som det i eksempel 11. For alle praktiske formål er det imidlertid fornuftig å bruke funksjonen og grafen som vi har funnet.

6 Litteratur

Andersen, P. (2007), Oppgavesamling i matematikk for allmennlærerstudenter, Eureka forlag

Andersen, P. (2016), Innføring i GeoGebra (funksjonslære), (2. utg.) Cappelen Damm

Hole, A. (2006), Grunnleggende matematikk i skoleperspektiv (4. utg.), Universitetsforlaget