To likninger med to ukjente

av

Peer Andersen

Innhold

1 Innledning

I dette heftet skal vi se nærmere på hvordan vi kan løse to likninger med to ukjente. Vi starter med å se på noen eksempler fra skolen og hvordan dette temaet dukker opp der i ulike sammenhenger. Vi går deretter over til å se mer systematisk på hvordan innsettingsmetoden fungerer før vi ser nærmere på addisjonsmetoden. Vi sammenlikner også metodene og ser på hvilken som lønner seg i ulike situasjoner. Vi ser også på hvordan likningsystemer kan løses grafisk med verktøy som GeoGebra. Vi fortsetter med å se på situasjoner der vi ikke har løsning og der vi har uendelig mange løsninger. Vi ser også på hva dette betyr grafisk ved å tegne opp likningene i GeoGebra. Til slutt ser vi på en enkelt eksempel med tre likninger med 3 ukjente før vi ser på hvordan vi som lærere kan lage oppgaver til elevene innenfor temaet. Til slutt i heftet er det noen oppgaver som dere kan prøve dere på.

Det er laget en video som gjennomgår hvordan vi kan løse systemer med to likninger. Videoen inneholder også noen oppgaver som dere kan prøve dere på underveis. Videoene finner dere her

Video som viser hvordan vi kan løse to likninger med to ukjente

2 Likningsystemer i skolen

Oppgaven under ble gitt til en halvårsprøve i en 6. klasse for noen år siden

Susann, Mariell og Petter kjøper hver sin skolesekk. Sekken til Mariell er tre ganger så dyr som sekken til Susann. Petter sin sekk koster halvparten så mye som Mariells sekk. Petter betaler 50 kroner mer for sin sekk enn Susann gjør for sin. Hva koster hver sekk?

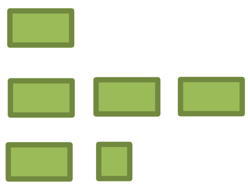
Denne oppgaven er ganske krevende og særlig for elever på mellomtrinnet. Denne kan løses på ulike måter. En metode som kan være aktuell i skolesammenheng er å bruke blokker for å illustrere dette.

Informasjonen vi får i denne oppgaven er at Mariell sin sekk er tre ganger så dyr som sekken til Susann. Petter sin sekk koster halvparten så mye som Mariell sin sekk, samtidig som vi får vite at Petter betaler 50 kroner mer for sin sekk enn Susann gjør for sin. Alt dette kan illustreres som følger:

Susanne:

Mariell:

Petter:



Her ser vi at prisen til Susann sin sekk er tegnet opp med én «blokk». Mariell sin sekk er tre ganger så dyr – derav tre blokker av samme størrelse som for prisen til Susann sin sekk. Petter sin sekk koster halvparten så mye som Mariell sin. Dermed kan prisen for hans sekk illustreres med 1,5 blokk (halvparten av Mariell sine tre). Vi vet at Petter sin sekk koster 50 kroner mer enn Susann sin. Vi ser da at en halvblokk vil utgjøre 50 kroner. En naturlig konsekvens av dette er at en hel blokk utgjør 100 kroner. Vi ser da at sekkene vil koste:

Susann sin sekk vil koste:	100 kr
Mariell sin sekk vil koste:	300 kr
Petter sin sekk vil koste:	150 kr

Vi ser at oppgaven kan løses uten å sette opp noe likninger og ved å bruke sunn fornuft og logisk tenkning. Det er nettopp denne strategien vi som lærere skal bruke på mellomtrinnet.

Oppgaven kunne vært løst ved å sette opp et likningsystem også. Vi definerer prisen på sekkene ved følgende variable

Susanne: x
Mariell: y
Petter: z

Bruker vi opplysningene som er gitt i oppgaven får vi

$y = 3x$ (1)
$z = \frac{y}{2}$ (2)
$z = x + 50$ (3)

Vi får med andre ord et likningsystem med 3 likninger med 3 ukjente! Systemet er riktignok ikke spesielt komplisert, men likevel heller ikke så enkelt at en opplagt ser løsningen med en gang. Her kan vi f. eks sette uttrykket for y fra likning (1) inn i likning (2). Det gir oss

$y = 3x$ (1)
$z = \frac{3x}{2}$ (2)
$z = x + 50$ (3)

Vi ser at vi i både likning (2) og (3) har z alene på venstre siden. Vi kan derfor sette disse uttrykkene lik hverandre. Det gir oss

$$\frac{3x}{2} = x + 50$$

$$3x = 2x + 100$$

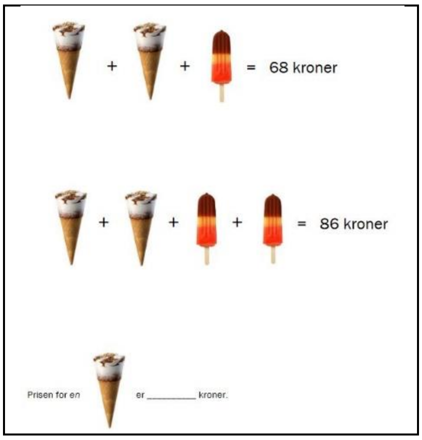
$$x = 100$$

Når vi har funnet x, kan vi sette denne inn i likning 1 og 2. Det gir oss

$x = 100$
$y = 300$
$z = 150$

Oppgaver som dette viser nødvendigheten av at lærere har kompetanse innenfor likningsløsning.

Vi skal se på en oppgave som ble gitt til eksamen i 10. klasse i 2019. Oppgaver som dette går ofte igjen på avgangsprøven i 10. klasse.



Dette er en oppgave som kan løses på ulike måter. Den kan løses både med sunn fornuft og logisk tenking og også ved å sette opp et likningssystem. La oss først se på hvordan den kan løses med logisk tenkning.

Vi vet nå at 2 kroneis og en saftis koster til sammen 68 kroner

Samtidig vet vi også at to kroneis og to saftis koster 86 kroner.

Vi ser da at en saftis koster $86 - 68 = 18$ kroner. Når vi har funnet prisen for en saftis kan vi enkelt regne ut prisen for en kroneis. Fra øverste figuren ser vi at to kroneis vil koste $68 - 18 = 50$ kroner til sammen og at en kroneis dermed vil koste 25 kroner.

Oppgaven kan også løses ved å sette opp ett likningssystem. Vi kan kalle prisen for kroneis for x og prisen for saftis for y. Det gir oss

$2x + y = 68$ (1)
$2x + 2y = 86$ (2)

Denne kan løses på mange måter. Vi skal i kapittel xx se systematisk på ulike måter for hvordan oppgaver som dette kan løses. Vi skal likevel presentere en løsning på denne også i dette avsnittet. Det første vi gjør er å dele likning (2) på 2. Vi løser også likning (1) med hensyn på y.

$y = 68 - 2x$ (1)
$x + y = 43$ (2)

Vi setter deretter inn uttrykket fra (1) i likning (2). Da får vi

$y = 68 - 2x$ (1)
$x + (68 - 2x) = 43$ (2)

Vi får videre

$y = 68 - 2x$ (1)
$x = 25$ (2)

Vi ser da at $y = 68 - 2 \cdot 25 = 18$

Med andre ord får vi også her at kroneis koster 25 kroner og saftis 18 kroner.

3 Innsettingsmetoden

Når vi bruker innsettingsmetoden til å løse et likningssett med to ukjente, finner vi enten x uttrykt med y, eller y uttrykt med x i den ene likningen. Deretter setter vi uttrykket fra den ene likningen inn i den andre likningen. På denne måten kan vi løse likningssettet ved først å forholde oss til én ukjent. Når vi har funnet den ene ukjente, setter vi denne løsningen inn i ett av de opprinnelige likningssettene og kommer deretter frem til den andre ukjente ved å løse likningen.

Vi ser på innsettingsmetoden gjennom noen eksempler.

<u>Eksempel 1</u>

$x + 2y = 8$ (1)
$3x - y = 3$ (2)

Poenget med denne metoden er vi prøver å få x eller y alene på den ene siden i en av likningene. I dette eksempelet prøver jeg å få x alene på venstre side i ligning (1). Det gir

$x = 8 - 2y$ (1)
$3x - y = 3$ (2)

Vi tar deretter verdien for x fra ligning (1) og setter inn i ligning (2). Det gir

$x = 8 - 2y$ (1)
$3 \cdot (8 - 2y) - y = 3$ (2)

Vi ganger ut parentesen i ligning (2) og får

$x = 8 - 2y$ (1)
$24 - 6y - y = 3$ (2)

Vi fortsetter utregningen

$x = 8 - 2y$ (1)
$-6y - y = 3 - 24$ (2)

Vi fortsetter utregningen

$x = 8 - 2y$ (1)
$-7y = -21$ (2)

Fra ligning (2) får vi nå

$\frac{-7y}{-7} = \frac{-21}{-7}$ (2)

$y = 3$ (2)

Denne løsningen setter vi inn i ligning (1). Det gir oss

$x = 8 - 2y$ (1)

$x = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2$ (1)

$x = 2$ (1)

Vi har nå funnet løsningene

$x = 2$ og $y = 3$

Eksempel 2

Vi skal løse følgende ligningssystem

$3x - \quad y = 10$ (1)
$2x + 3y = 14$ (2)

I dette eksempelet prøver jeg å få y alene på venstre side i ligning (1). Det jeg gjør er at først flytter y over på høyre siden og 10 over på venstre siden

$3x - 10 = y$ (1)
$2x + 3y = 14$ (2)

Vi ser at y nå står alene på høyre siden. Vi bytter da om høyre og venstre side i ligning (1)

$y = 3x - 10$ (1)
$2x + 3y = 14$ (2)

Vi tar deretter verdien for y fra ligning (1) og setter inn i ligning (2). Det gir

$y = 3x - 10$ (1)
$2x + 3 \cdot (3x - 10) = 14$ (2)

Vi ganger ut parentesen i ligning 2 og får

$y = 3x - 10$ (1)
$2x + 9x - 30 = 14$ (2)

Vi fortsetter utregningen

$y = 3x - 10$ (1)
$2x + 9x = 14 + 30$ (2)

Vi fortsetter utregningen

$y = 3x - 10$ (1)
$11x = 44$ (2)

Fra ligning (2) får vi nå

$\frac{11x}{11} = \frac{44}{11}$ (2)

$x = 4$ (2)

Denne løsningen setter vi inn i ligning (1). Det gir oss

$y = 3x - 10$ (1)

$y = 3 \cdot 4 - 10 = 2$ (1)

$y = 2$ (1)

Vi har nå funnet løsningene

$x = 4$ og $y = 2$

4 Addisjonsmetoden

Vi kan bruke addisjonsmetoden til å løse likningssett, når vi på en enkel måte kan manipulere et av likningssettene til at den ene ukjente elimineres når likningssettene trekkes sammen. Denne metoden kalles også for eliminasjonsmetoden. Selv om metoden kanskje oftest kalles for addisjonsmetoden, er det viktig å forstå at poenget med metoden er eliminering av en av de ukjente, og at dette kan gjøres både ved at likningene adderes og subtraheres. Man velger den regnearten, som gjør at man på enklest måte får bort den ene ukjente.

Vi ser på addisjonsmetoden gjennom noen eksempler.

Eksempel 3

Vi skal løse følgende ligningssystem

$$3x + 2y = 5 \qquad (1)$$
$$x + 2y = -1 \qquad (2)$$

Poenget med denne metoden er vi legger sammen eller trekker fra venstre side i ligning (1) med venstre side i ligning (2). Vi gjør det samme på høyre side. La oss se hva som skjer når vi tar ligning (1) minus ligning (2)

$$3x - x + 2y - 2y = 5 - (-1) \qquad (1) - (2)$$

$$2x = 6 \qquad (1) - (2)$$

Dette gir oss løsningen direkte. Vi ser nå at $x = 3$. Løsningen til y kan vi finne ved å sette inn verdien for x inn i f. eks ligning 2. Det gir oss

$$x + 2y = -1 \qquad (2)$$

$$3 + 2y = -1 \qquad (2)$$

$$2y = -1 - 3 \qquad (2)$$

$$2y = -4 \qquad (2)$$

$$y = -2 \qquad (2)$$

Vi har nå funnet løsningene

$$x = 3 \quad \text{og} \quad y = -2$$

I dette eksempelet var vi litt heldig siden vi hadde $2y$ i begge ligningene. Vanligvis er vi ikke så heldig, men addisjonsmetoden kan likevel brukes. La oss se på et eksempel til.

Eksempel 4

Vi skal løse følgende ligningssystem

$$5x - 13y = 54 \qquad (1)$$
$$9x + \ \ 7y = \ \ 6 \qquad (2)$$

Her kan vi ikke bruke addisjonsmetoden direkte siden vi ikke har samme antall x'er eller y'er i ligning (1) og (2). Men vi kan gange begge ligningene med et tall slik at vi får det samme antall x'er eller y'er i ligningene. I dette eksempelet kan vi f. eks gange ligning (1) med 9 og ligning (2) med 5.

$$5x - 13y = 54 \qquad |\cdot 9 \qquad (1)$$
$$9x + \ \ 7y = \ \ 6 \qquad |\cdot 5 \qquad (2)$$

Vi får da

$$45x - 117y = 486 \qquad (1)$$
$$45x + \ \ 35y = \ \ 30 \qquad (2)$$

Nå kan vi bruke addisjonsmetoden ved å ta ligning (1) minus ligning (2). Det gir oss

$$45x - 45x - 117y - 35y = 486 - 30 \qquad (1) - (2)$$

$$-152y = 456 \qquad (1) - (2)$$

$$\frac{-152y}{-152} = \frac{456}{-152} \qquad (1) - (2)$$

$$y = -3 \qquad (1) - (2)$$

Vi finner x ved å sette inn verdien for y inn i f. eks likning (1). Det gir

$$5x - 13y = 54 \qquad (1)$$

$$5x - 13 \cdot (-3) = 54 \qquad (1)$$

$$5x - (-39) = 54 \qquad (1)$$

$$5x + 39 = 54 \qquad (1)$$

$$5x = 54 - 39 \qquad (1)$$

$$5x = 15 \qquad (1)$$

$$x = 3 \qquad (1)$$

Vi har nå funnet løsningene

$x = 3$ og $y = -3$

5 Addisjonsmetoden kontra innsettingsmetoden

Hvilken metode som er best å bruke er en smakssak. Noen foretrekker innsettingsmetoden, mens andre foretrekker addisjonsmetoden. I noen situasjoner er det likevel slik at den ene gir enklere utregninger enn den andre. I det siste eksempelet vi så på med addisjonsmetoden

$$5x - 13y = 54 \qquad (1)$$
$$9x + 7y = 6 \qquad (2)$$

gir addisjonsmetoden vesentlig enklere utregninger enn innsettingsmetoden. Vi ser at dersom vi skal prøve å løse en av dem med hensyn på x eller y får vi en brøk. Denne brøken drar vi så med inn i den andre likningen. La oss se hva som skjer dersom vi prøver å løse denne med innsettingsmetoden.

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5}y \qquad (1)$$

$$9x + 7y = 6 \qquad (2)$$

Vi setter inn utrykket for x inn i likning (2).

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5}y \qquad (1)$$

$$9 \cdot \left(\frac{54}{5} + \frac{13}{5}y\right) + 7y = 6 \qquad (2)$$

Dette gir oss

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5}y \qquad (1)$$

$$\frac{486}{5} + \frac{117}{5}y + 7y = 6 \qquad (2)$$

Når vi ganger nederste likning med 5 får vi

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5}y \qquad (1)$$

$$486 + 117y + 35y = 30 \qquad (2)$$

Videre utregninger gir

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5}y \qquad (1)$$

$$152y = -456 \qquad (2)$$

Vi får da at

$$y = -3 \qquad (2)$$

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5} \cdot (-3) = \frac{54-39}{5} = \frac{15}{5} = 3 \qquad (1)$$

Som vi ser så kommer vi frem til samme svar som ved addisjonsmetoden, men utregningene er vesentlig mer kompliserte siden vi må regne med brøk. I situasjoner som denne der vi ikke på en enkel måte kan løse en av likningene med hensyn på x eller y foretrekker jeg å bruke addisjonsmetoden. Det gir enklest regning og minst sjanse for å gjøre feil.

6 Praktiske problemstillinger

Det er ikke alltid at en oppgave er en ferdig oppstilt likning vi skal løse slik som i kapittel 3 og 4. Ofte i skolesammenheng kan elevene bli presentert for en problemstilling som leder frem til et likningssystem med to likninger og to ukjente. For å belyse dette kan vi ta utgangspunkt i følgende problemstilling

<u>Eksempel 5</u>

En familie på 2 voksne og 3 barn drar på fotballkamp sammen en annen familie som består av 1 voksen og 2 barn. Ingen av familiene har sjekket prisen på inngangsbilletten, men de konstaterer at familien med 2 voksne og 3 barn til sammen har betalt 270 kroner og at familien med 1 voksen og 2 barn har betalt 150 kroner for billettene. Hva kostet en voksen billett og hva koster en barnebillett?

Når vi skal løse en oppgave som dette er det viktig at vi bruker litt tid på å lese og forstå selve oppgaveteksten og hva vi skal finne. Ser vi nøye på denne ser vi at det er prisen på en voksenbillett og prisen på en barnebillett vi skal finne. Ofte er det slik at prisen på en barnebillett er halvparten av en voksenbillett, men slett ikke alltid. Vi kan derfor ikke legge det til grunn her. Vi starter med å kalle prisen for en voksenbillett for x og en barnebillett for y.

x: Prisen for en voksenbillett
y: Prisen for en barnebillett

Vi ser det er to ukjente som vi skal finne og det medfører at vi etter all sannsynlighet vil få et likningssystem med to likninger og to ukjente. Når vi skal løse denne starter vi med å nøste opp de opplysningene vi har. Ser vi på første familien med 2 voksne og 3 barn kan vi sette opp følgende uttrykk

$$2x + 3y = 270$$

Ser vi på andre familien med en voksen og 2 barn leder det oss frem til likningen

$$x + 2y = 150$$

Vi har med andre ord to likninger med to ukjente. Dette kan vi løse på forskjellig vis og både innsettingsmetoden og addisjonsmetoden fungerer fint. Vi viser hva løsningen blir med addisjonsmetoden

$$2x + 3y = 270 \qquad (1)$$
$$x + 2y = 150 \qquad (2)$$

Vi ønsker å kvitte oss med x så derfor ganger vi nederste likning med 2. Det gir oss

$$2x + 3y = 270 \qquad (1)$$
$$2x + 4y = 300 \qquad (2)$$

Vi tar deretter likning (2) minus likning (1). Det gir oss

$y = 30$ (2) – (1)

Med andre ord koster en barnebillett 30 kroner. Vi kan så erstatte y med 30 i likning (2) for å finne prisen for voksen billett

$x + 2 \cdot 30 = 150$ (2)
$x = 90$ (2)

Som vi ser så koster voksenbilletten 90 kroner.

Som vi ser så er selve likningssystemet relativt enkelt å løse. Utfordringen for elevene med slike oppgaver er ofte å få systematisert opplysningen og deretter få satt opp likningssystemet.

Eksempel 6

Eva og Trude drar på matmarkedet i Kongsberg for å handle moreller og jordbær. Eva handler 3 kg med moreller og 4 kurver med jordbær. Dette betaler hun 360 kroner for. Trude handler 2 kg med moreller og 8 kurver med jordbær. Hun betaler til sammen 400 kroner for. Hvor mye koster 1 kg med moreller og hva koster en kurv med jordbær?

Også her har vi to ukjente og det er kiloprisen på moreller og prisen på en kurv med jordbær. Vi har imidlertid en del opplysninger i teksten som kan hjelpe oss å løse problemstillingen. Vi ser først på det Eva har handlet. Vi kaller prisen for et kilo moreller for x og prisen for en kurv med jordbær for y.

x: Prisen for et kilo moreller
y: Prisen for et kilo jordbær

Da kan vi sette opp følgende likning basert på Eva sin handleliste

$$3x + 4y = 360$$

Ser vi på Trude sin handleliste kan vi sette opp følgende likning

$$2x + 8y = 400$$

Igjen ser vi at vi får to likninger med to ukjente.

$3x + 4y = 360$ (1)
$2x + 8y = 400$ (2)

Vi ser at likning (2) kan forenkles ved å dele på 2. Vi bør i de aller fleste tilfelle forkorte likningene om det er mulig. Her får vi da

$3x + 4y = 360$ (1)
$x + 4y = 200$ (2)

Når vi har forkortet ser vi at addisjonsmetoden er den enkleste å bruke ved å ta (1) minus (2). Det gir oss

$2x = 160$ (1)

$x = 80$ (2)

Et kilo moreller koster med andre ord 80 kroner. Setter vi dette inn i likning 2 får vi

$$80 + 4y = 200$$
$$4y = 120$$
$$y = 30$$

Vi ser av dette at prisen for en kurv med jordbær blir 30 kroner.

7 Eksempel fra eksamen i 10. klasse

Vår 2017 ble denne interessante oppgaven gitt til eksamen i matematikk for 10. klasse

Oppgave 9 (6 poeng)

a) Løs likningssystemet

$$5x + 4y = 9$$
$$6x + 7y = 13$$

Ada Lovelace (1815 – 1852) regnes som verdens første dataprogrammerer. Hun skrev programmer for en stor, planlagt regnemaskin som skulle hete *Den analytiske maskinen*.

I 1979 fikk dataprogrammeringsspråket Ada navn etter Ada Lovelace.

Et likningssystem med to ukjente, x og y, kan skrives på formen

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

der a, b, c, d, e og f er konstanter.

Ada Lovelace laget formler for løsning av et likningssystem med to ukjente:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \quad \text{og} \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

b) Bruk formlene til Ada Lovelace ovenfor til å løse likningssystemet

$$5x + 4y = 9$$
$$6x + 7y = 13$$

c) Løs likningssystemet

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

og vis at du får formlene til Ada Lovelace som løsninger.

Oppgaven starter med at elevene skal løse et likningssystem med to likninger med to ukjente. Oppgaven fortsetter med at elevene skal løse samme likningssystem med formlene fra Lovelace før de i siste delspørsmål skal vise formlene til Lovelace. De to første spørsmålene er relativt greie selv om spørsmål a) kan medføre en del brøkregning om en velger innsettingsmetoden. Spørsmål c) er det jeg vil kalle relativt krevende og dette spørsmålet viser også nødvendigheten av at lærere har solid kompetanse innenfor dette temaet. Vi skal se på hvordan vi skal løse disse tre spørsmålene. Vi starter med spørsmål a) der vi skal løse likningssystemet

$$5x + 4y = 9 \qquad (1)$$
$$6x + 7y = 13 \qquad (2)$$

Det første vi må gjøre er å vurdere hvilken løsningsmetode vi skal bruke. Her ser vi at om vi velger innsettingsmetoden og deretter løser ene likningen med hensyn på x eller y så medfører det brøkregning. Jeg vil derfor anbefale å bruke addisjonsmetoden her. Det gir enklere regning. Vi starter med å gange likning (1) med 6 og likning (2) med 5. Det gir oss

$30x + 24y = 54$ (1)
$30x + 35y = 65$ (2)

Tar vi likning (2) minus likning (1) får vi

$11y = 11$

som gir at

$y = 1$

Vi kan deretter sette inn $y = 1$ i likning 1. Det gir oss

$5x + 4 \cdot 1 = 9$

Vi ser at også

$x = 1$

Vi kunne naturligvis brukt innsettingsmetoden også, men den gir som nevnt noe mer regning der vi også må regne med brøker. Addisjonsmetoden er derfor å foretrekke.

La oss gå videre til spørsmål b). Der skal vi bruke formlene som er oppgitt til å løse oppgaven. I oppgaven er det oppgitt at om vi har følgende likningssystem

$ax + by = c$
$dx + ey = f$

så kan løsningene skrives som

$x = \frac{ce-bf}{ae-bd}$ og $y = \frac{af-cd}{ae-bd}$

Likningssystemet vi skal løse er

$5x + 4y = 9$ (1)
$6x + 7y = 13$

Det første vi gjør er å identifisere a, b, c, d, e, f. Vi ser at disse kan skrives som

$a = 5, b = 4, c = 9, d = 6, e = 7, f = 13.$

Vi setter deretter disse inn i formlene. Det gir oss

$$x = \frac{9 \cdot 7 - 4 \cdot 13}{5 \cdot 7 - 4 \cdot 6} = \frac{63 - 52}{35 - 24} = \frac{11}{11} = 1$$

$$y = \frac{5 \cdot 13 - 9 \cdot 6}{5 \cdot 7 - 4 \cdot 6} = \frac{65 - 54}{35 - 24} = \frac{11}{11} = 1$$

Vi ser at vi naturligvis får samme svar som med addisjonsmetoden.

Spørsmål c) er nok det som er mest utfordrende her. Oppgaven er i seg selv ikke så veldig vanskelig, men det er mange bokstaver i likningene og vi skal bevise formlene som vi brukte i b). V i skal vise denne ved å bruke addisjonsmetoden på likningssettet.

$ax + by = c$ (1)
$dx + ey = f$ (2)

Vi skal starte med å eliminere x. Vi multipliserer likning (1) med d og likning (2) med a. Det gir oss

$adx + bdy = cd$ (1)
$adx + aey = af$ (2)

Vi tar deretter likning (1) minus likning (2). Det gir

$bdy - aey = cd - af$ (1) - (2)

Vi omformer venstre side slik at vi får satt y utenfor en parentes.

$(bd - ae)y = cd - af$

Dette gir oss

$$y = \frac{cd - af}{bd - ae}$$

Ganger vi både oppe og nede med -1 får vi

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

som samsvarer med formelen for y. Tilsvarende finner vi formelen for x. Vi tar utgangspunkt i likningsystemet vi startet med

$ax + by = c$ (1)
$dx + ey = f$ (2)

Vi skal nå eliminere y og får å få det til ganger vi (1) med e og (2) med b. Vi får da

$aex + bey = ce$ (1)
$bdx + bey = bf$ (2)

Vi tar deretter likning (1) minus likning (2). Det gir

$aex - bdx = ce - bf$ (1) - (2)

Vi omformer venstre side slik at vi får satt x utenfor en parentes.

$(ae - bd)x = ce - bf$

Dette gir oss

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

som var det vi skulle bevise.

Denne oppgaven viser at det er nødvendig at vi som lærere har god innsikt i dette temaet om vi skal kunne tilrettelegge for gode undervisningsopplegg innenfor løsning av likningsystemer for elevene. Vi må være trygge både på å kunne generalisere uttrykkene og også å kunne bevise setninger.

8 Grafisk løsning

Likningsystemer kan også løses grafisk enten ved å tegne opp grafene for hånd eller ved å bruke et graftegningsprogram som for eksempel GeoGebra. I dette avsnittet skal vi se litt nærmere på dette. Vi tar utgangspunkt i likningsystemet under

Eksempel 7

$3x + y = 7$ (1)
$x + 2y = -1$ (2)

Vi kan her skrive om begge likningene slik at vi får y alene på venstre siden. Da får vi

$y = -3x + 7$ (1)
$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ (2)

Vi kan deretter lage en tabell med funksjonsverdier og deretter tegne opp begge grafene

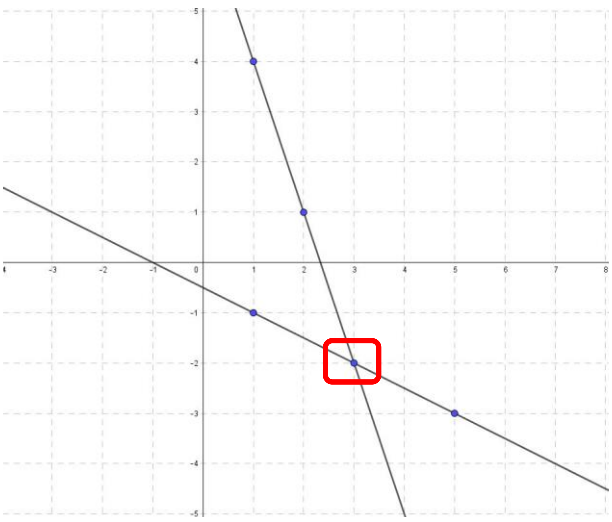
Likning 1

x	0	1	2
y	7	4	1

Likning 2

x	1	3	5
y	-1	-2	-3

Når vi tegner opp disse to linjene i et koordinatsystem får vi



Vi ser at løsningen til likningen er

$x = 3$ og $y = -2$.

Det er naturligvis ikke nødvendig å løse likningene med hensyn på y slik vi har gjort over. Vi kan også velge x verdier og deretter finne y verdier. Vi tar utgangspunkt i likning 1.

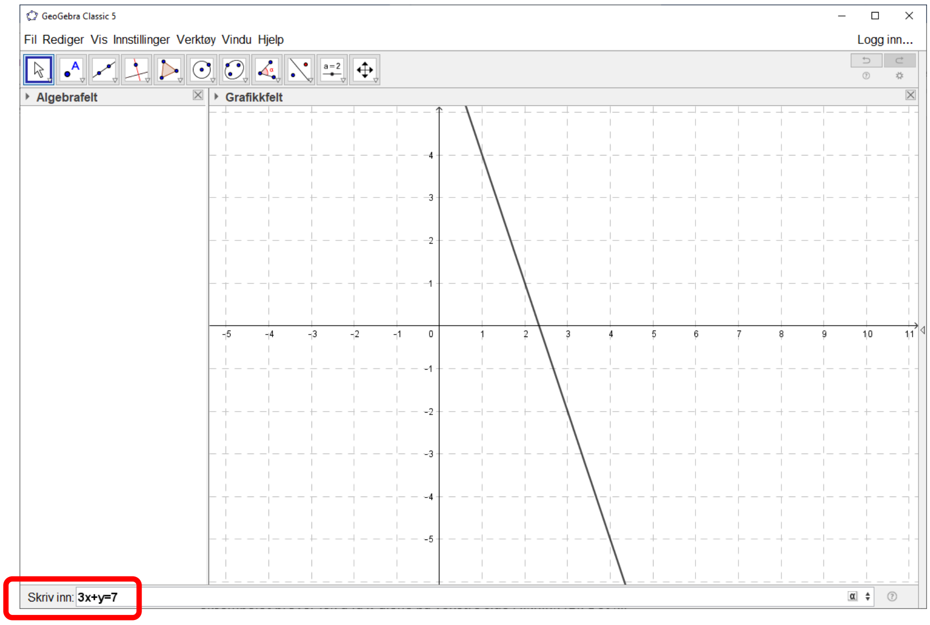
$x = 0 \rightarrow y = 7$

$x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 + y = 7 \rightarrow y = 4$

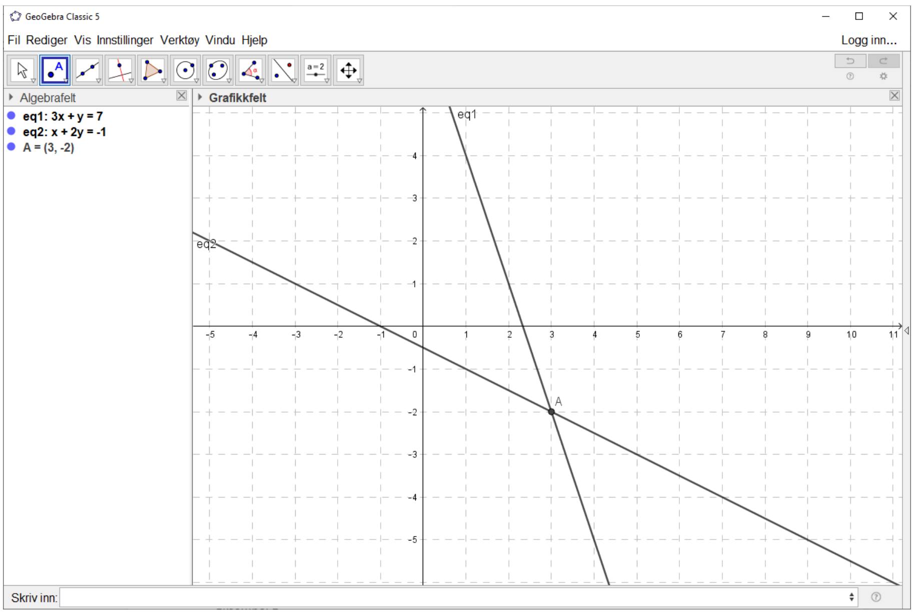
$x = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 + y = 7 \rightarrow y = 1$

På den måten får vi samme tabell som i sted. Tilsvarende kunne vi også gjort for likning 2.

Vi kan også bruke GeoGebra for å tegne opp likningene og deretter finne løsningen.



Vi skriver inn likningen etter Skriv inn som er rammet inn med rødt. Vi kan skrive inn likningen direkte uten å løse den med hensyn på y. Etter at vi har skrevet inn begge likningene får vi



Vi ser at GeoGebra gir oss løsningen. Her har jeg valgt å markere punktet som gir løsningen ved å velge skjæringspunktet mellom linjene.

9 Likninger uten løsning

Vi skal se på et eksempel med to likninger og to ukjente der vi ikke får noe løsning.

<u>Eksempel 8</u>

Vi skal løse følgende ligningssystem

$x - 2y = 4$ (1)
$-2x + 4y = 7$ (2)

Vi prøver å løse denne med innsettingsmetoden. (Vi kunne også brukt addisjonsmetoden). I dette eksempelet prøver jeg å få x alene på venstre side i ligning (1). Det gir

$x = 4 + 2y$ (1)
$-2x + 4y = 7$ (2)

Vi tar deretter verdien for x fra ligning (1) og setter inn i ligning (2). Det gir

$x = 4 + 2y$ (1)
$-2 \cdot (4 + 2y) + 4y = 7$ (2)

Vi ganger ut parentesen i ligning (2) og får

$x = 4 + 2y$ (1)
$-8 - 4y + 4y = 7$ (2)

Vi fortsetter utregningen

$x = 4 + 2y$ (1)
$-8 = 7$ (2)

Vi har altså klart å vise at -8 er lik 7. Det er selvsagt ikke mulig, og konklusjonen vår blir at ligningssystemet ikke har noe løsning.

Vi kunne sett dette ut fra ligningssystemet også. Vi ganger ligning 1 med -2.

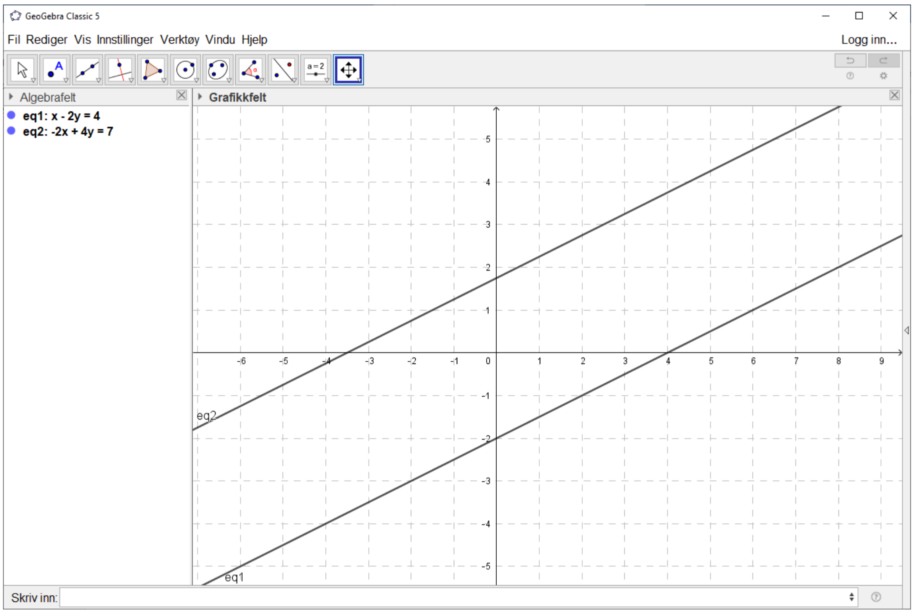
$x - 2y = 4 \quad | \cdot (-2)$ (1)
$-2x + 4y = 7$ (2)

Det gir oss

$-2x + 4y = -8$ (1)
$-2x + 4y = 7$ (2)

Her ser vi at venstre siden i begge likningene er like og høyresiden er forskjellig. Det er her selvsagt umulig å finne verdier for x og y slik at $-2x + 4y$ i det ene øyeblikket er lik -8 og i neste øyeblikk skal det være lik 7

Et interessant spørsmål er hva som skjer om vi prøver å tegne opp disse to likningene grafisk. La oss tegne opp begge to i GeoGebra og se på hva som skjer



Vi ser at grafene til de to funksjonene er parallelle og at det ikke er noen punkter der de skjærer hverandre. Dette samsvarer godt med det vi fant innledningsvis i avsnittet med at vi ikke har noen løsning.

10 Likninger med uendelig mange løsninger

Vi skal se på et eksempel med to likninger og to ukjente der vi får uendelig mange løsninger

Eksempel 9

Vi skal løse følgende ligningssystem

$2x - y = 2$ (1)
$-6x + 3y = -6$ (2)

Vi prøver å løse denne med innsettingsmetoden. (Vi kunne også brukt addisjonsmetoden). I dette eksempelet prøver jeg å få y alene på venstre side i ligning (1). Det gir

$y = 2x - 2$ (1)
$-6x + 3y = -6$ (2)

Vi tar deretter verdien for y fra ligning (1) og setter inn i ligning (2). Det gir

$y = 2x - 2$ (1)
$-6x + 3 \cdot (2x - 2) = -6$ (2)

Vi ganger ut parentesen i ligning (2) og får

$y = 2x - 2$ (1)
$-6x + 6x - 6 = -6$ (2)

Vi fortsetter utregningen med å flytte -6 over på høyre siden

$y = 2x - 2$ (1)
$-6x + 6x = -6 + 6$ (2)

Vi fortsetter utregningen

$y = 2x - 2$ (1)
$0 = 0$ (2)

Vi har altså klart å vise at 0 er lik 0. Hva betyr så dette? La oss gå tilbake til de opprinnelige likningene.

$2x - y = 2$ (1)
$-6x + 3y = -6$ (2)

Vi deler den nederste likningen med -3

$2x - y = 2$ (1)
$-6x + 3y = -6 \quad | : (-3)$ (2)

Det gir oss

$$2x - y = 2 \qquad (1)$$
$$2x - y = 2 \qquad (2)$$

Vi ser nå at likningen 1 og likning 2 er like. Med andre ord er det uendelig mange tallpar av x og y som passer i likningen. Vi ser at hvis vi f. eks velger

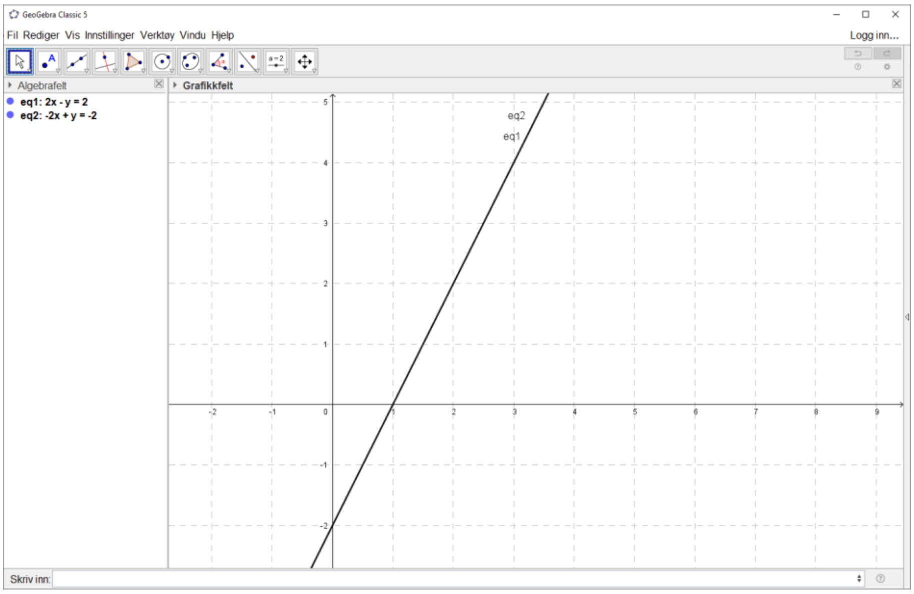
$x = 1 \rightarrow y = 0$

$x = 3 \rightarrow y = 4$

$x = -5 \rightarrow y = -12$

Vi ser at vi kan velge alle mulige verdier for x og deretter finne en passende y verdi. Med andre ord har vi uendelig mange løsninger.

Vi skal se på hva som skjer når vi tegner opp grafene til de to likningene i GeoGebra.



Her kan det se ut som vi bare har tegnet ene grafen, men begge to er tegnet. Det som skjer her, er at de er helt sammenfallende og derfor ser det ut som det bare er en som et tegnet. Løsningen av likningssystemet er alle x og y verdier som er sammenfallende for de to grafene, hvilket betyr at det er uendelig mange løsninger. Alle x og y som ligger på grafene vil være løsning til likningssystemet. I sted fant vi tre mulige løsninger, men som vi ser så kan vi finne uendelig mange.

11 Tre likninger med tre ukjente

Det er ofte behov for å kunne løse større likningsystemer enn to likninger med to ukjente. Utregningene blir imidlertid ofte mer kompliserte jo flere likninger og flere ukjente en har. Systemer med mer enn to likninger og to ukjente er utenfor rammene av hva det jobbes med i skolen. Vi har likevel valgt å ta med et eksempel på dette da vi som lærere bør ha noe kjennskap til hvordan slike systemer kan løses. I eksempelet vi skal se på skal vi bruke prinsippene fra innsettingsmetoden

Eksempel 10

$x + y + z = 6$ (1)
$3x - y + 2z = 7$ (2)
$2x + y - z = 1$ (3)

Det vi skal gjøre nå er å løse likning (1) med hensyn på z. Deretter setter vi inn verdien for z i likning (2) og (3).

$z = 6 - x - y$ (1)
$3x - y + 2(6 - x - y) = 7$ (2)
$2x + y - (6 - x - y) = 1$ (3)

Ganger vi ut parentesene og trekker sammen uttrykkene får vi

$z = 6 - x - y$ (1)
$x - 3y = -5$ (2)
$3x + 2y = 7$ (3)

Ser vi på likning (2) og (3) ser vi at vi kun har x og y som ukjente i disse likningene. Likning (2) og (3) er med andre ord to likninger med to ukjente. Vi skal løse likning (2) med hensyn på x og sette inn i likning (3).

$z = 6 - x - y$ (1)
$x = -5 + 3y$ (2)
$3(-5 + 3y) + 2y = 7$ (3)

Vi trekker sammen likning (3). Det gir oss

$z = 6 - x - y$ (1)
$x = -5 + 3y$ (2)
$-15 + 9y + 2y = 7$ (3)

Vi ser at likning (3) gir oss løsningen $y = 2$. Vi setter så denne verdien inn i likning (2) for å finne x. Vi får da

Vi trekker sammen likning (3). Det gir oss

$z = 6 - x - y$ (1)
$x = -5 + 3 \cdot 2 = 1$ (2)
$y = 2$ (3)

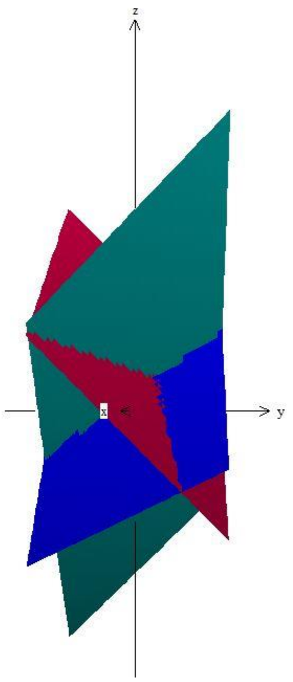
Vi har funnet x og y. Disse setter vi inn i likning (1) for å finne z. Vi får da

$$z = 6 - 1 - 2 = 3 \qquad (1)$$
$$x = 1 \qquad (2)$$
$$y = 2 \qquad (3)$$

Dermed ser vi at løsningen blir

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

Når vi hadde to likninger med to ukjente kunne vi løse disse grafisk ved å tegne opp grafene til begge likningene. Det var en enkel jobb og program som GeoGebra gir et visuelt bilde av hvor løsningen ligger. Når har vi har tre likninger med 3 ukjente blir det svært vanskelig å visualisere eller løse dette grafisk. Hver likning representerer en flate i rommet. I tilfeller der vi har en entydig løsning som i vårt eksempel vil vi dette være det punktet der alle flatene krysser hverandre. Dette punktet har koordinatene (x, y, z)



I praksis er det umulig å bruke en grafisk løsningsmetode for å løse likninger med 3 ukjente eller flere. Da må vi stole på utregningene våre.

12 Lage oppgaver om likningsystemer

Selv om det finnes mange oppgaver om likningsystemer tilgjengelig i bøker og på nettet er det likevel fra tid til annen behov for å kunne lage egne oppgaver. I dette avsnittet skal vi se nærmere på hvordan vi kan lage oppgaver. Vi starter å se på oppgaver med ferdig oppstilt likningssystem før vi ser på en praktisk situasjon.

Eksempel 11

Når en skal lage oppgaver om likningsystemer er det ofte fornuftig å ta utgangspunkt i det en ønsker skal være svaret på likningssystemet og så bygger vi det ut derfra. Vi antar derfor at løsningen på oppgaven vi skal lage er

$x = 2$ og $y = 3$

Det neste vi må ta stilling til er om dette skal være en enkel oppgave med enkle utregninger eller om det skal være en litt mer komplisert oppgave. Vi ser først på en enkel oppgave som kan løses med både innsettingsmetoden og addisjonsmetoden. Vi kan f. eks ta utgangspunkt i at vi legger sammen x og y. Siden vi kjenner svaret vet vi at summen blir 5. Det leder oss frem til likningen

$$x + y = 5$$

Den neste likningen kan f. eks ta utgangspunkt i at vi skal ta $3x - y$. Siden vi vet at $x = 2$ og $y = 3$ ser vi at vi får likningen

$$3x - y = 1$$

Vi har da laget en oppgave med to likninger med to ukjente

$$x + y = 5$$
$$3x - y = 1$$

Eksempel 12

Vi ser på et eksempel til som er litt mer komplisert. Vi ønsker nå å lage en oppgave der det vil være en fordel å bruke addisjonsmetoden. Igjen tar vi utgangspunkt i en løsning. Denne gang bruker vi

$x = 4$ og $y = -2$.

Koeffisientene i likningen skal denne gang være litt større tall enn det vi hadde i sted og gjerne noen primtall slik at det ikke skal være så enkelt å løse. Vi kan f. eks i første likningen bruke $5x - 3y$ og så regne ut hva dette blir for løsningen vi har valgt. Det gir oss da

$$5x - 3y = 5 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = 26$$

som igjen gir oss likningen

$$5x - 3y = 26$$

Den neste likningen finner vi på samme måte, men vi passer på å bruke litt andre koeffisienter enn det vi har i første likning slik at oppgaven ikke blir rett frem å løse. Vi kan f. eks bruke $7x + 11y$. Setter vi inn løsningen vi har valgt får vi

$7x + 11y = 6$

Vi har dermed klart å sette opp likningssystemet

$5x - 3y = 26$ (1)
$7x + 11y = 6$ (2)

som vi vet, har løsningen $x = 4$ og $y = -2$.

Vi kan løse likningen med bruk av addisjonsmetoden for å se om vi får samme svar som vi har tatt som utgangspunkt. Vi ganger likning (1) med 7 og likning (2) med 5. Da får vi eliminert x.

$35x - 21y = 182$ (1)
$35x + 55y = 30$ (2)

Vi trekker deretter likning (2) fra likning (1). Det gir oss

$-76y = 152$ (1) – (2)

som igjen gir oss at

$y = -2$

For å finne x setter vi inn $y = -2$ i likning 1. Det gir oss

$5x - 3 \cdot (-2) = 26$
$5x = 20$
$x = 4$

Vi ser at vi får samme løsning (naturlig nok) som vi startet med.

Eksempel 13

Vi skal til slutt se på en situasjon med en praktisk oppgave. En typisk situasjon som ofte går igjen på eksamen i 10. klasse er varianter av oppgaven som beskrevet i kapittel 2 der vi skal kjøpe saftis og kroneis. Vi skal se på hvordan vi kan lage en slik oppgave. Først må vi finne ut hva vi skal kjøpe. I dette eksempelet tenker jeg at vi skal kjøpe skillingsboller og brus. Før vi går videre må vi bestemme prisen. Det er greit å bruke priser som er noenlunde realistiske. Vi setter derfor prisen til skillingsbolle til 20 kroner og en flaske brus til 28 kroner. Det neste vi må bestemme oss for er hvor lett eller vanskelig en oppgave skal være. I tidligere eksamensoppgaver ser vi at oppgavene ofte er av en slik art at en enkelt kan resonerer seg frem til svaret uten å sette opp et likningsystem. La oss se på en slik situasjon. Vi bestemmer oss derfor for at vi skal kjøpe et visst antall boller og visst antall flasker brus, f. eks 6 boller og 4 flasker brus.

Dette skal koste $6 \cdot 20 + 4 \cdot 28 = 232$.

Med andre ord vet vi at 6 boller og 4 brus koster 232 kroner. Skal vi lage en enkel oppgave kan vi i neste uttrykk ta utgangspunkt i at vi også kjøper 6 boller, men bare 2 brus.

Dette vil koste $6 \cdot 20 + 4 \cdot 28 = 176$.

Vi kan dermed formulere denne oppgaven

Kari kjøper 6 skillingsboller og 4 flasker cola. Hun betaler 232 kroner for dette. Ole kjøper 6 skillingsboller og 2 flasker cola. Dette betaler han 176 kroner. Finn ut hvor mye en skillingsbolle koster og hvor mye en flaske cola koster.

Denne oppgaven kan løses rent praktisk. Vi tar da utgangspunkt i det Kari har handlet

Dette koster 176 kroner

Siden 6 boller og 2 brus koster 176 kroner ser vi at 2 brus koster $232 - 176 = 56$ kroner. Hvilket betyr at en flaske brus koster 28 kroner. Når vi har funnet dette kan vi bruke dette resultatet for å finne prisen på skillingsboller. Vi ser at 6 boller vil koste $176 - 56 = 120$ kroner, som igjen medfører at en bolle koster 20 kroner.

Vi kunne også satt dette opp som et likningssystem ved å kalle prisen for bolle for x og prisen for brus for y. Det ville gitt oss likningssystemet

$$6x + 4y = 232 \qquad (1)$$
$$6x + 2y = 176 \qquad (2)$$

Dette løses enkelt ved å bruke addisjonsmetoden. Hvis vi tar (1) minus (2) får vi

$$2y = 56$$
$$y = 28$$

Verdien til x finner vi ved å sette inn y i en av likningene. Da finner vi at $x = 20$.

13 Oppgaver

Oppgave 1

Løs følgende ligningssystem

$$2x + y = 4$$
$$3x - y = 1$$

Løs også likningen grafisk med GeoGebra.

Oppgave 2

Finn eventuelle løsninger til følgende ligningssystem

$$x + 2y = 5$$
$$2x + y = 7$$

Løs også likningen grafisk med GeoGebra.

Oppgave 3

Finn eventuelle løsninger til følgende ligningssystem

$$7x + 17y = 13$$
$$5x + \;\; 3y = -9$$

Løs også likningen grafisk med GeoGebra.

Oppgave 4

Finn eventuelle løsninger til følgende ligningssystem

$$11x + 13y = 146$$
$$17x + \;\; 5y = 120$$

Løs også likningen grafisk med GeoGebra.

Oppgave 5

Finn eventuelle løsninger til følgende ligningssystem

$$x - 2y = 5$$
$$-2x + 4y = 3$$

Løs også likningen grafisk med GeoGebra.

Oppgave 6

Finn eventuelle løsninger til følgende ligningssystem

$$2x + \;\; y = 3$$
$$4x + 2y = 6$$

Løs også likningen grafisk med GeoGebra.

<u>Oppgave 7</u>

To personer drar til en gårdsbutikk for å kjøpe eplejuice og skoleboller. Den ene personen kjøper to juice og en bolle og betaler 85 kroner for dette

= 85 kroner

Den andre kjøper to juice og 3 boller og betaler 135 kroner for dette.

= 135 kroner

a) Finn ut hvor mye en flaske med juice koster og hvor mye en bolle koster uten å sette opp et likningssystem.

b) Sett opp et likningssystem med to likninger og to ukjente og løs dette.

<u>Oppgave 8</u>

Farmen er et program som er populært for tiden. For mange år siden dro en bonde til et marked for å kjøpe dyr til gården sin. Han kjøpte sauer og geiter og til sammen kjøpte han 46 dyr. Hver sau kostet 80 kroner og hver geit kostet 60 kroner. Han betalte totalt 3160 kroner for alle dyrene. Hvor mange sauer og hvor mange geiter kjøpte han? Sett opp et ligningssystem og løs dette.

<u>Oppgave 9</u>

Et flyselskap har akkurat bestilt seg nye fly av typen Airbus A320 og A321. Flyselskapet opplyser at de har bestilt 13 fly til sammen av disse to typene. Videre opplyser de at en A320 koster 500 millioner og en A321 som er noe større koster 600 millioner. Totalt har selskapet handlet for 7 milliarder kroner. Selskapet vil ikke si hvor mange fly de har kjøpt av henholdsvis A320 og A321. Kan du sette opp et ligningssystem og regne ut hvor mange A320 og hvor mange A321 ordren består av.

<u>Oppgave 10</u>

To familier bestemte seg sommeren 2021 for å dra til badeland i Bø. Den ene familien besto av 2 voksne og to barn. Denne familien betalte 1416 kroner for billettene. Den andre familien besto av 1 voksen og 3 barn. Denne familien betalte 1386 kroner for billettene. På bakgrunn av dette skal du sette opp et likningssystem med to likninger og to ukjente og finne ut hva en voksen billett koster, og hva en barnebillett koster.

Oppgave 11

Løs følgende likningssystem

$$x - y + 2z = 4$$
$$x + 2y + 2z = 2$$
$$2x - y - 2z = 3$$

Oppgave 12

Tre familier har bestemt seg for å dra til Tusenfryd. Tusenfryd opererer med billetter for voksne, billetter for barn og for seniorer som typisk er besteforeldre.

Familie 1: Denne består av to voksne, et barn og en bestemor (senior). De betaler 1647 kroner totalt.
Familie 2: Denne består av en voksen, to barn og en bestefar (senior). De betaler 1587 kroner totalt.
Familie 3: Denne består av en voksen og et barn. De betaler totalt 858 kroner.

Sett opp et likningssystem og løs dette for å finne prise for voksne, barn og for seniorer. Hint: Du vil få 3 likninger med 3 ukjente, men selve likningssystemet bør være overkommelig å løse

Fasit

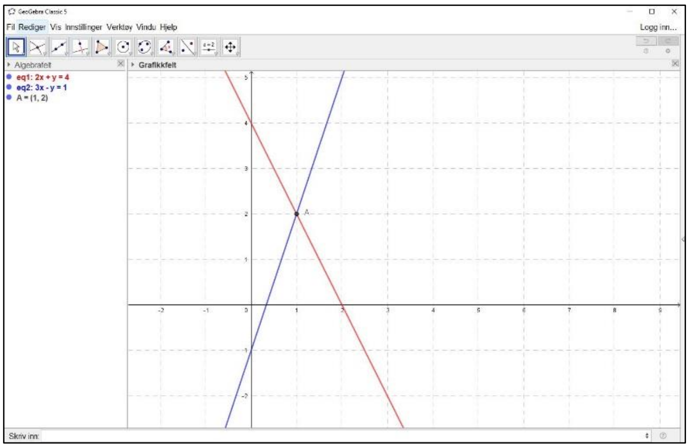
<u>Oppgave 1</u>

Her er det hipp om happ om en bruker innsetting eller addisjonsmetoden. En kommer frem til løsningen

$x = 1$ og $y = 2$

i begge tilfellene.

I figuren under er løsningen vist i GeoGebra



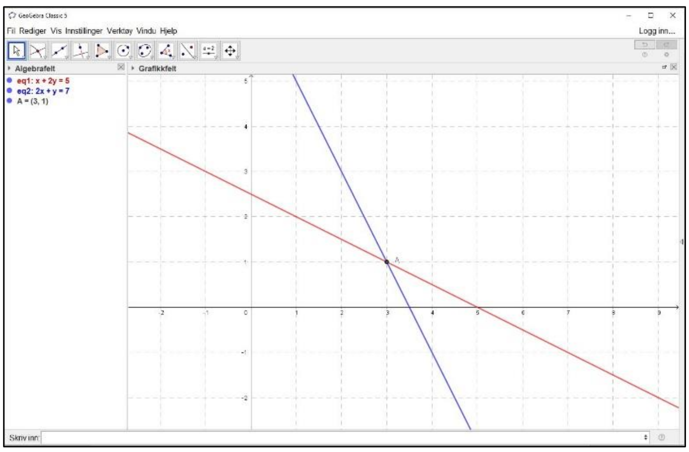
<u>Oppgave 2</u>

Her er det hipp om happ om en bruker innsetting eller addisjonsmetoden. En kommer frem til løsningen

$x = 3$ og $y = 1$

i begge tilfellene.

I figuren under er løsningen vist i GeoGebra

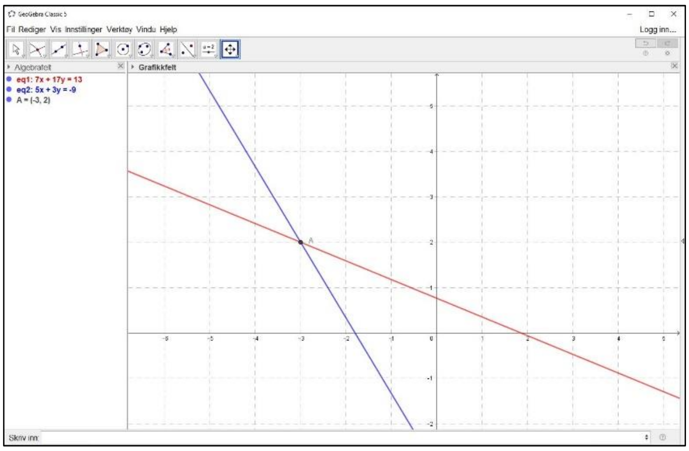


Oppgave 3

Her er det enklest å bruke addisjonsmetoden, ellers blir det en del brøkregning. En kommer frem til løsningen

$x = -3$ og $y = 2$

I figuren under er løsningen vist i GeoGebra

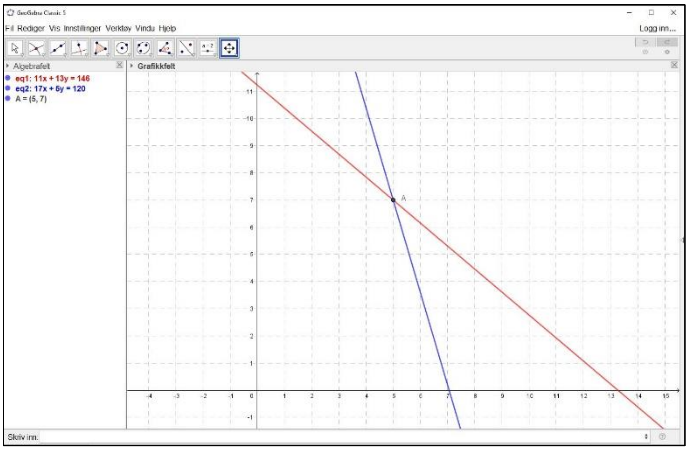


Oppgave 4

Her er det enklest å bruke addisjonsmetoden, ellers blir det en del brøkregning. En kommer frem til løsningen

$x = 5$ og $y = 7$

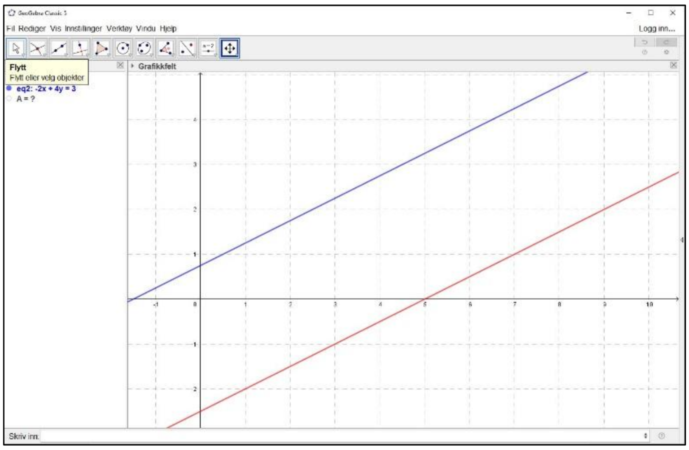
I figuren under er løsningen vist i GeoGebra



Oppgave 5

Her får vi en selvmotsigelse, hvilket betyr at likningen ikke har løsning.

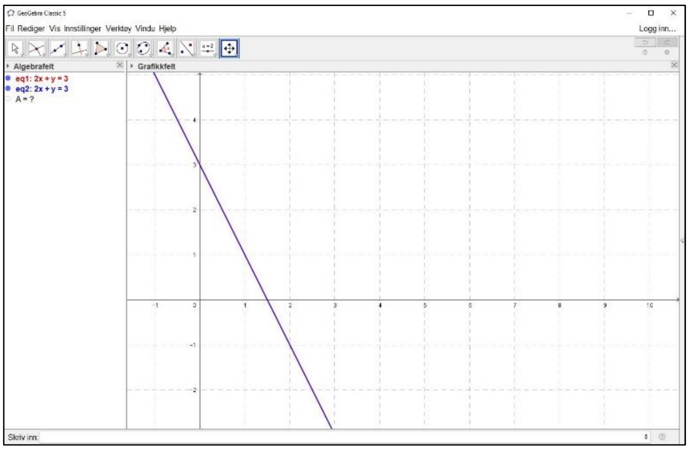
I figuren under er det vist hvordan dette ser ut i GeoGebra. Vi ser vi får to parallelle linjer og ingen skjæringspunkt.



Oppgave 6

Ganger vi første likningen med 2 ser vi at vi får to like likninger. Det betyr at vi har uendelig mange løsninger.

I figuren under er det vist hvordan dette ser ut i GeoGebra. Vi ser vi får grafene til de to likningene er sammenfallende.



Oppgave 7

a) En flaske juice koster 30 kroner og en skolebolle koster 25 kroner. Nøkkelen her er at vi vet at 2 juice og en bolle koster 85 kroner. Da ser vi at 2 boller vil koste 50 kroner og at en bolle altså vil koste 25 kroner.

b) Vi kan sette opp et likningssystem

$2x + y = 85$

$2x + 3y = 135$

Løser vi dette får vi samme svar som i spørsmål a).

Oppgave 8

Vi kan sette opp følgende ligningssystem

$x + y = 4680$
$x + 60y = 3160$

Løses dette finner vi at

$x = 20$ og $y = 26$

som betyr at han kjøpte 20 sauer og 26 geiter

Oppgave 9

Vi kan sette opp følgende ligningssystem

$x + y = 13$
$500x + 600y = 7000$

Løses dette finner vi at

$x = 8$ og $y = 5$

som betyr at selskapet kjøpte 8 A320 fly og 5 A321 fly. Merk her at den siste likningen kan forenkles ned til

$5x + 6y = 70$

ved å forkorte med 100. De gir litt lettere regning enn å regne med den slik den står.

Oppgave 10

Vi kan sette opp dette likningssystemet

$2x + 2y = 1416$

$x + 3y = 1386$

Løser vi dette finner vi at $x = 369$ og at $y = 339$. Dette er prisen på henholdsvis voksen billett og barnebillett

Oppgave 11

Vi har tre likninger med tre ukjente og får følgende løsning

$x = 2, y = -1, z = 1$

Oppgave 12

Vi kaller prisen for voksne for x, for barn for y og for seniorer for z. Vi får da

$2x + y + z = 1647$ (1)
$x + 2y + z = 1587$ (2)
$x + y = 858$ (3)

Vi løser likningen 1 med hensyn på z og setter dette inn i likning (2). Vi får da overført systemet med 3 likninger med 3 ukjent til et med to likninger med to ukjente.

$z = 1647 - 2x - y$ (1)
$x + 2y + 1647 - 2x - y = 1587$ (2)
$x + y = 858$ (3)

Vi trekker sammen likning 2. Da får vi

$z = 1647 - 2x - y$ (1)
$-x + y = -60$ (2)
$x + y = 858$ (3)

Legger vi sammen likning (2) og (3) får vi

$2y = 798$ (2) + (3)

$y = 399$

En barnebillett koster med andre ord 399 kroner. For å finne prisen for en voksen billett kan vi sette svaret inn i likning 3. Det gir oss

$x + 399 = 858$ (3)

$x = 459$

En voksen billett koster dermed 459 kroner. Prisen for en senior finner vi ved å sette inn verdien for x og y inn i likning (1).

$z = 1647 - 2 \cdot 459 - 399$ (1)

$z = 330$

Vi har dermed funnet at voksen billett koster 459 kroner, en barnebillett 399 kroner og en seniorbillett 330 kroner.