To likninger med to ukjente

av

Peer Andersen

TO LIKNINGER MED TO UKJENTE

I dette lille notatet skal vi se på hvordan vi kan bruke addisjonsmetoden og innsettingsmetoden for å løse to likninger med to ukjente.

Innsettingsmetoden

Vi ser på den gjennom noen eksempler

Eksempel 1

$x + 2y = 8 \quad (1)$
$3x - y = 3 \quad (2)$

Poenget med denne metoden er vi prøver å få x eller y alene på den ene siden i en av likningene. I dette eksempelet prøver jeg å få x alene på venstre side i ligning (1). Det gir

$x = 8 - 2y \quad (1)$
$3x - y = 3 \quad (2)$

Vi tar deretter verdien for x fra ligning (1) og setter inn i ligning (2). Det gir

$x = 8 - 2y \quad (1)$
$3 \cdot (8 - 2y) - y = 3 \quad (2)$

Vi ganger ut parentesen i ligning (2) og får

$x = 8 - 2y \quad (1)$
$24 - 6y - y = 3 \quad (2)$

Vi fortsetter utregningen

$x = 8 - 2y \quad (1)$
$-6y - y = 3 - 24 \quad (2)$

Vi fortsetter utregningen

$x = 8 - 2y \quad (1)$
$-7y = -21 \quad (2)$

Fra ligning (2) får vi nå

$\frac{-7y}{-7} = \frac{-21}{-7} \quad (2)$

$y = 3 \quad (2)$

Denne løsningen setter vi inn i ligning (1). Det gir oss

$x = 8 - 2y \quad (1)$

$x = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2 \quad (1)$

$x = 2$ (1)

Vi har nå funnet løsningene

$x = 2$ og $y = 3$

<u>Eksempel 2</u>

Vi skal løse følgende ligningssystem

$3x - \quad y = 10$ (1)
$2x + \ 3y = 14$ (2)

I dette eksempelet prøver jeg å få y alene på venstre side i ligning (1). Det gir når jeg først flytter y over på høyre siden og 10 over på venstre siden

$3x - \ 10 = y$ (1)
$2x + \ 3y = 14$ (2)

Vi ser at y nå står alene på høyre siden. Vi bytter da om høyre og venstre side i ligning (1)

$y = 3x - 10$ (1)
$2x + \ 3y = 14$ (2)

Vi tar deretter verdien for y fra ligning (1) og setter inn i ligning (2). Det gir

$y = 3x - 10$ (1)
$2x + 3 \cdot (3x - 10) = 14$ (2)

Vi ganger ut parentesen i ligning 2 og får

$y = 3x - \ 10$ (1)
$2x + 9x - 30 = 14$ (2)

Vi fortsetter utregningen

$y = 3x - 10$ (1)
$2x + 9x = 14 + 30$ (2)

Vi fortsetter utregningen

$y = 3x - \ 10$ (1)
$11x = 44$ (2)

Fra ligning (2) får vi nå

$\frac{11x}{11} = \frac{44}{11}$ (2)

$x = 4$ (2)

Denne løsningen setter vi inn i ligning (1). Det gir oss

$y = 3x - 10$ (1)

$y = 3 \cdot 4 - 10 = 2$ (1)

$y = 2$ (1)

Vi har nå funnet løsningene

$x = 4$ og $y = 2$

Addisjonsmetoden

Vi ser på den gjennom noen eksempler

Eksempel 3

Vi skal løse følgende ligningssystem

$3x + 2y = 5$ (1)
$x + 2y = -1$ (2)

Poenget med denne metoden er vi legger sammen eller trekker fra venstre side i ligning (1) med venstre side i ligning (2). Vi gjør det samme på høyre side. La oss se hva som skjer når vi tar ligning (1) minus ligning (2)

$3x - x + 2y - 2y = 5 - (-1)$ (1) - (2)

$2x = 6$ (1) - (2)

Dette gir oss løsningen direkte. Vi ser nå at $x = 3$. Løsningen til y kan vi finne ved å sette inn verdien for x inn i f. eks ligning 2. Det gir oss

$x + 2y = -1$ (2)

$3 + 2y = -1$ (2)

$2y = -1 - 3$ (2)

$2y = -4$ (2)

$y = -2$ (2)

Vi har nå funnet løsningene

$x = 3$ og $y = -2$

I dette eksempelet var vi litt heldig siden vi hadde $2y$ i begge ligningene. Vanligvis er vi ikke så heldig men addisjonsmetoden kan likevel brukes. La oss se på et eksempel til.

Eksempel 4

Vi skal løse følgende ligningssystem

$$\begin{aligned} 5x - 13y &= 54 \qquad &(1) \\ 9x + \ \ 7y &= \ \ 6 \qquad &(2) \end{aligned}$$

Her kan vi ikke bruke addisjonsmetoden direkte siden vi ikke har samme antall x'er eller y'er i ligning (1) og (2). Men vi kan gange begge ligningene med et tall slik at vi får det samme antall x'er eller y'er i ligningene. I dette eksempelet kan vi f. eks gange ligning (1) med 9 og ligning (2) med 5.

$$\begin{aligned} 5x - 13y &= 54 \qquad &| \cdot 9 \qquad &(1) \\ 9x + \ \ 7y &= \ \ 6 \qquad &| \cdot 5 \qquad &(2) \end{aligned}$$

Vi får da

$$\begin{aligned} 45x - 117y &= 486 \qquad &(1) \\ 45x + \ \ 35y &= \ \ 30 \qquad &(2) \end{aligned}$$

Nå kan vi bruke addisjonsmetoden ved å ta ligning (1) minus ligning (2). Det gir oss

$45x - 45x - 117y - 35y = 486 - 30$ (1) – (2)

$-152y = 456$ (1) – (2)

$\frac{-152y}{-152} = \frac{456}{-152}$ (1) – (2)

$y = -3$ (1) – (2)

Vi finner x ved å sette inn verdien for y inn i f. eks likning (1). Det gir

$5x - 13y = 54$ (1)

$5x - 13 \cdot (-3) = 54$ (1)

$5x - (-39) = 54$ (1)

$5x + 39 = 54$ (1)

$5x = 54 - 39$ (1)

$5x = 15$ (1)

$x = 3$ (1)

Vi har nå funnet løsningene

$x = 3$ og $y = -3$

Addisjonsmetoden kontra innsettingsmetoden

Hvilken metode som er best å bruke er en smakssak. Noen foretrekker innsettingsmetoden, mens andre foretrekker addisjonsmetoden. I noen situasjoner er det likevel slik at den ene gir enklere utregninger enn den andre. I det siste eksempelet vi så på med addisjonsmetoden

$$5x - 13y = 54 \qquad (1)$$
$$9x + 7y = 6 \qquad (2)$$

gir addisjonsmetoden vesentlig enklere utregninger enn innsettingsmetoden. Vi ser at dersom vi skal prøve å løse en av dem med hensyn på x eller y får vi en brøk. Denne brøken drar vi så med inn i den andre likningen. La oss se hva som skjer dersom vi prøver å løse denne med innsettingsmetoden.

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5}y \qquad (1)$$

$$9x + 7y = 6 \qquad (2)$$

Vi setter inn utrykket for x inn i likning (2).

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5}y \qquad (1)$$

$$9 \cdot \left(\frac{54}{5} + \frac{13}{5}y\right) + 7y = 6 \qquad (2)$$

Dette gir oss

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5}y \qquad (1)$$

$$\frac{486}{5} + \frac{117}{5}y + 7y = 6 \qquad (2)$$

Når vi ganger nederste likning med 5 får vi

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5}y \qquad (1)$$

$$486 + 117y + 35y = 30 \qquad (2)$$

Videre utregninger gir

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5}y \qquad (1)$$

$$152y = -456 \qquad (2)$$

Vi får da at

$$y = -3 \qquad (2)$$

$$x = \frac{54}{5} + \frac{13}{5} \cdot (-3) = \frac{54-39}{5} = \frac{15}{5} = 3 \qquad (1)$$

Som vi ser så kommer vi frem til samme svar som ved addisjonsmetoden, men utregningene er vesentlig mer kompliserte siden vi må regne med brøk. I situasjoner som denne der vi ikke på en enkel måte kan løse en av likningene med hensyn på x eller y foretrekker jeg å bruke addisjonsmetoden.

Likninger uten løsning

Vi skal se på et eksempel med to likninger og to ukjente der vi ikke får noe løsning.

Eksempel 5

Vi skal løse følgende ligningssystem

$x-2y=4$ (1)
$-2x+\ 4y=7$ (2)

Vi prøver å løse denne med innsettingsmetoden. (Vi kunne også brukt addisjonsmetoden). I dette eksempelet prøver jeg å få x alene på venstre side i ligning (1). Det gir

$x=4+2y$ (1)
$-2x+4y=7$ (2)

Vi tar deretter verdien for x fra ligning (1) og setter inn i ligning (2). Det gir

$x=4+2y$ (1)
$-2\cdot(4+2y)+4y=7$ (2)

Vi ganger ut parentesen i ligning (2) og får

$x=4+2y$ (1)
$-8-4y+4y=7$ (2)

Vi fortsetter utregningen

$x=4+2y$ (1)
$-8=7$ (2)

Vi har altså klart å vise at -8 er lik 7. Det er selvsagt ikke mulig og konklusjonen vår blir at ligningssystemet ikke har noe løsning.

Vi kunne sett dette ut fra ligningssystemet også. Vi ganger ligning 1 med -2.

$x-2y=4 \quad |\cdot(-2)$ (1)
$-2x+\ 4y=7$ (2)

Det gir oss

$-2x+4y=-8$ (1)
$-2x+\ 4y=7$ (2)

Her ser vi at venstre siden i begge likningene er like og høyresiden er forskjellig. Det er her selvsagt umulig å finne verdier for x og y slik at $-2x+4y$ i det ene øyeblikket er lik -8 og i neste øyeblikk skal det være lik 7

Likninger med uendelig mange løsninger

Vi skal se på et eksempel med to likninger og to ukjente der vi får uendelig mange løsninger

Eksempel 6

Vi skal løse følgende ligningssystem

$2x - y = 2 \qquad (1)$
$-6x + 3y = -6 \qquad (2)$

Vi prøver å løse denne med innsettingsmetoden. (Vi kunne også brukt addisjonsmetoden). I dette eksempelet prøver jeg å få y alene på venstre side i ligning (1). Det gir

$y = 2x - 2 \qquad (1)$
$-6x + 3y = -6 \qquad (2)$

Vi tar deretter verdien for y fra ligning (1) og setter inn i ligning (2). Det gir

$y = 2x - 2 \qquad (1)$
$-6x + 3 \cdot (2x - 2) = -6 \qquad (2)$

Vi ganger ut parentesen i ligning (2) og får

$y = 2x - 2 \qquad (1)$
$-6x + 6x - 6 = -6 \qquad (2)$

Vi fortsetter utregningen med å flytte -6 over på høyre siden

$y = 2x - 2 \qquad (1)$
$-6x + 6x = -6 + 6 \qquad (2)$

Vi fortsetter utregningen

$y = 2x - 2 \qquad (1)$
$0 = 0 \qquad (2)$

Vi har altså klart å vise at 0 er lik 0. Hva betyr så dette? La oss gå tilbake til de opprinnelige likningene.

$2x - y = 2 \qquad (1)$
$-6x + 3y = -6 \qquad (2)$

Vi deler den nederste likningen med -3

$2x - y = 2 \qquad (1)$
$-6x + 3y = -6 \quad | : (-3) \qquad (2)$

Det gir oss

$2x - y = 2 \qquad (1)$
$2x - y = 2 \qquad (2)$

Vi ser nå at likningen 1 og likning 2 er like. Med andre ord er det uendelig mange tallpar av x og y som passer i likningen. Vi ser at hvis vi f. eks velger

$x = 1 \rightarrow y = 0$

$x = 3 \rightarrow y = 4$

$x = -5 \rightarrow y = -12$

Vi ser at vi kan velge alle mulige verdier for x og deretter finne en passende y verdi. Med andre ord har vi uendelig mange løsninger.

Oppgaver til temaet to likninger og to ukjente

Oppgave 1

Løs følgende ligningssystem

$2x + y = 4$
$3x - y = 1$

Oppgave 2

Finn eventuelle løsninger til følgende ligningssystem

$x + 2y = 5$
$2x + y = 7$

Oppgave 3

Finn eventuelle løsninger til følgende ligningssystem

$7x + 17y = 13$
$5x + 3y = -9$

Oppgave 4

Finn eventuelle løsninger til følgende ligningssystem

$11x + 13y = 146$
$17x + 5y = 120$

Oppgave 5

Finn eventuelle løsninger til følgende ligningssystem

$x - 2y = 5$
$-2x + 4y = 3$

Oppgave 6

Finn eventuelle løsninger til følgende ligningssystem

$2x + y = 3$
$4x + 2y = 6$

Oppgave 7

Farmen er et program som er populært for tiden. For mange år siden dro en bonde til et marked for å kjøpe dyr til gården sin. Han kjøpte sauer og geiter og til sammen kjøpte han 46 dyr. Hver sau kostet 80 kroner og hver geit kostet 60 kroner. Han betalte totalt 3160 kroner for alle dyrene. Hvor mange sauer og hvor mange geiter kjøpte han? Sett opp et ligningssystem og løs dette.

Oppgave 8

Et flyselskap har akkurat bestilt seg nye fly av typen Airbus A320 og A321. Flyselskapet opplyser at de har bestilt 13 fly til sammen av disse to typene. Videre opplyser de at en A320 koster 500 millioner og en A321 som er noe større koster 600 millioner. Totalt har selskapet handlet for 7 milliarder kroner. Selskapet vil ikke si hvor mange fly de har kjøpt av henholdsvis A320 og A321. Kan du sette opp et ligningssystem og regne ut hvor mange A320 og hvor mange A321 ordren består av.

Fasit

<u>Oppgave 1</u>

Her er det hips om haps om en bruker innsetting eller addisjonsmetoden. En kommer frem til løsningen

$x = 1$ og $y = 2$

i begge tilfellene

<u>Oppgave 2</u>

Her er det hips om haps om en bruker innsetting eller addisjonsmetoden. En kommer frem til løsningen

$x = 3$ og $y = 1$

i begge tilfellene

<u>Oppgave 3</u>

Her er det enklest å bruke addisjonsmetoden, ellers blir det en del brøkregning. En kommer frem til løsningen

$x = -3$ og $y = 2$

<u>Oppgave 4</u>

Her er det enklest å bruke addisjonsmetoden, ellers blir det en del brøkregning. En kommer frem til løsningen

$x = 5$ og $y = 7$

<u>Oppgave 5</u>

Her får vi en selvmotsigelse, hvilket betyr at likningen ikke har løsning.

<u>Oppgave 6</u>

Ganger vi første likningen med 2 ser vi at vi får to like likninger. Det betyr at vi har uendelig mange løsninger.

<u>Oppgave 7</u>

Vi kan sette opp følgende ligningssystem

$$x + y = 46$$
$$80x + 60y = 3160$$

Løses dette finner vi at $x = 20$ og $y = 26$, som betyr at han kjøpte 20 sauer og 26 geiter

Oppgave 8

Vi kan sette opp følgende ligningssystem

$$x + y = 13$$
$$500x + 600y = 7000$$

Løses dette finner vi at $x = 8$ og $y = 5$, som betyr at selskapet kjøpte 8 A320 fly og 5 A321 fly. Merk her at den siste likningen kan forenkles ned til

$$5x + 6y = 70$$

ved å forkorte med 100. De gir litt lettere regning enn å regne med den slik den står.