Notat kombinatorikk og sannsynlighetregning

av

Peer Andersen

SANNSYNLIGHETSREGNING MED FLERE TRINN

Sannsynlighetsregning med et trinn kan være situasjoner der vi spør hva sjansen er for å få en sekser på en terning, hva sjansen er for å få en spar om du trekker et kort fra en kortstokk etc. Denne type problemstillinger er greie å regne på og jeg bruker ikke noe tid på å ta det opp her.

Mer interessant er det når en ser på problemstillinger med flere trinn. Det kan være situasjoner som disse:

- En familie planlegger å få to barn, hva er sjansen for de får en gutt og en jente?

- I en gruppe på 3 gutter og 2 jenter skal to stykker trekkes ut til å representere klassen. Hva er sjansen for å trekke ut to gutter? Hva er sjansen for å trekke ut to jenter? Hva med en av hver?

- Hva er sjansen for å vinne i et kakelotteri, når det skal trekkes ut 2 gevinster?

- Det er 4 blå kuler og 2 rød kuler i en bolle. Du trekker to kuler tilfeldig. Hva er sjansen for å trekke ut to blå kuler, hva er sjansen for å trekke ut en av hver?

Disse situasjonene er eksempler på problemer over to trinn. Lysø beskriver i boken sin eksempler tilsvarende de to første jeg har nevnt og viser hvordan vi kan bruke trestruktur for å løse disse. Dette er helt utmerket fremstilt i boken og dere bør kikke på disse eksemplene. Som et supplement til boken vil jeg her se på den siste situasjonen og vise hvordan vi kan gå frem for å løse dette når vi bruker Lysø sin fremgangsmåte.

Jeg velger også å tegne opp et trediagram der jeg viser alle kombinasjonene. Diagrammet er fremstilt på neste side. Jeg har valgt å nummerere de blå kulene med B1, B2, B3 og B4 og de røde kulene med R1 og R2. Kulene er for øvrig helt like bortsett fra fargen.

Når vi trekker ut første kule har vi 6 valg. Vi kan trekke ut en av de fire blå kulene eller en av de to røde kulene. Dette representerer trinn 1. På trinn 2 har vi brukt opp en av kulene og vi har således 5 forskjellige valg for kule 2. Under trinn 2 er de ulike utfallene for den andre kulen listet opp. Totalt ser vi at vi har $6 \cdot 5 = 30$ kombinasjoner. Av disse ser vi ved opptelling at 12 inneholder to blå kuler, 16 inneholder en av hver og 2 kombinasjoner inneholder 2 røde kuler. Sannsynlighetene kan vi da finne

$P(BB) = \frac{12}{30}$ $\qquad$ $P(BR) = \frac{16}{30}$ $\qquad$ $P(RR) = \frac{2}{30}$

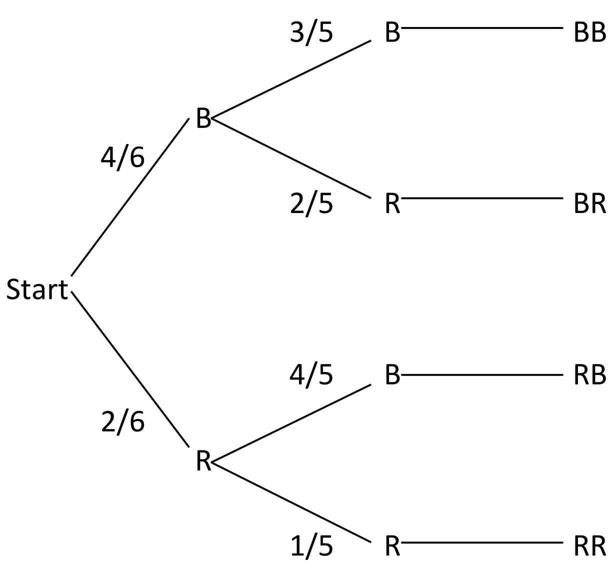
Vi ser videre fra diagrammet at sannsynligheten for hvert enkelt utfall er 1/30 siden hvert av disse utfallene er like sannsynlige. La oss se litt nærmere på sjansen for å trekke ut f. eks B1 og B2 kulene.

Trinn 1	Trinn 2	Mulige resultatet	Sannsynlighet
	B2	BB	1/30
	B3	BB	1/30
B1	B4	BB	1/30
	R1	BR	1/30
	R2	BR	1/30
	B1	BB	1/30
	B3	BB	1/30
B2	B4	BB	1/30
	R1	BR	1/30
	R2	BR	1/30
	B1	BB	1/30
	B2	BB	1/30
B3	B4	BB	1/30
	R1	BR	1/30
	R2	BR	1/30
	B1	BB	1/30
	B2	BB	1/30
B4	B3	BB	1/30
	R1	BR	1/30
	R2	BR	1/30
	B1	RB	1/30
	B2	RB	1/30
R1	B3	RB	1/30
	B4	RB	1/30
	R1	RR	1/30
	B1	RB	1/30
	B2	RB	1/30
R2	B3	RB	1/30
	B4	RB	1/30
	R1	RR	1/30

Vi kan også se på hva sjansen er for å trekke ut B1 på første trekning. Den er jo 1/6. Sjansen for å trekke ut B2 på andre trekning er 1/5. Multipliserer vi disse sammen får vi

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

Neste fase blir å forenkle dette treet



$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30}$$

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30}$$

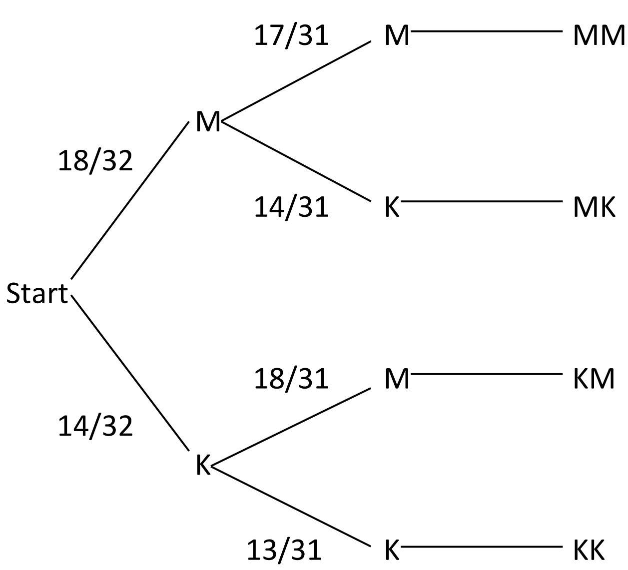
$$\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{30}$$

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$$

Vi ser resultatene blir de samme som vi fant i sted. For å finne sannsynligheten for en av hver må her legge sammen resultatet for BR og RB. Vi får da $P = \frac{16}{30}$ akkurat som i sted.

Vi tar et eksempel til. I en friidrettsgruppe er det 14 kvinnelige medlemmer og 18 mannlige medlemmer. Vi skal trekke ut to stykker som skal få representere klubben i Oslo Marathon. Hva er sjansen for at dette blir to menn? Hva er sjansen for at dette blir to kvinner? Hva er sjansen for at det blir en av hver?

Vi setter opp en trestruktur som i forrige eksempel.



$$\frac{18}{32} \cdot \frac{17}{31} = \frac{306}{992} = \frac{153}{496}$$

$$\frac{18}{32} \cdot \frac{14}{31} = \frac{252}{992} = \frac{126}{496}$$

$$\frac{14}{32} \cdot \frac{18}{31} = \frac{252}{992} = \frac{126}{496}$$

$$\frac{14}{32} \cdot \frac{13}{31} = \frac{182}{992} = \frac{91}{496}$$

Vi ser da at sannsynlighetene blir

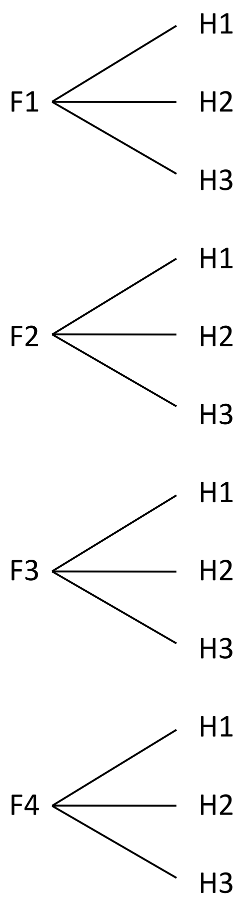
$P(MM) = \frac{153}{496}$ $\qquad$ $P(MK) = \frac{252}{496}$ $\qquad$ $P(KK) = \frac{91}{496}$

KOMBINATROIKK

Kapittel 10.5 i Lysø sin bok omhandler kombinatorikk. Han tar for seg fire ulike situasjoner. Vi skal se nærmere på disse situasjonene og gi noen eksempler på hver av dem. De tre første som han beskriver er i grunnen samme sak og vi legger samme tankemåte til grunn for disse tre. Den siste derimot (uordnet utvalg uten tilbakelegging) skiller seg fra de tre første og denne er også den som er klart mest krevende å forstå.

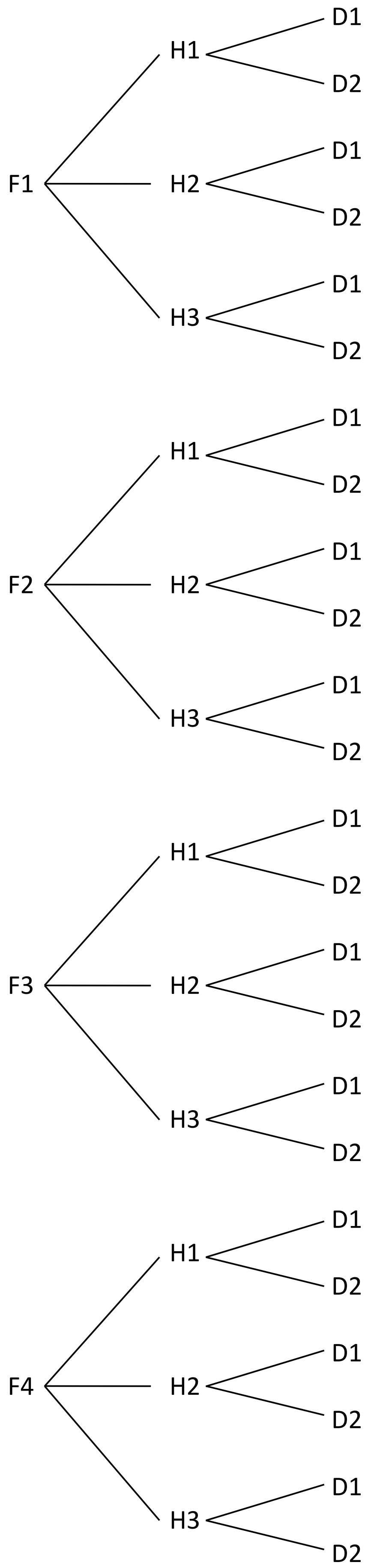
Enkle sammensetninger

Et eksempel på dette kan være at vi skal ut å spise middag på restaurant. Vi bestemmer oss for å spise forrett og hovedrett. Fra menyen ser vi at restauranten tilbyr 4 forretter og 3 hovedretter. Hvor mange kombinasjoner er det mulig å sette sammen? Her kan vi tegne opp et tre slik jeg har gjort under.



Vi ser her at antall kombinasjoner blir $4 \cdot 3 = 12$

Vi tenker oss nå at vi ønsker dessert også. La oss tenke oss at restauranten tilbyr 2 forskjellige desserter. Hvor mange 3 retters menyer kan vi nå sette sammen? Vi kan nå utvide treet med en ekstra gren for dessertene slik jeg har gjort på neste side.



F1
H1
D1
D2
H2
D1
D2
H3
D1
D2
F2
H1
D1
D2
H2
D1
D2
H3
D1
D2
F3
H1
D1
D2
H2
D1
D2
H3
D1
D2
F4
H1
D1
D2
H2
D1
D2
H3
D1
D2

Vi ser nå at antall forskjellige kombinasjoner med 3 retters middager som vi kan spise blir

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Ordnet utvalg med tilbakelegging

Lysø gir et par eksempler på ordede utvalg med tilbakelegging. Vi skal her se på et eksempel til. En problemstilling kan være: Hvor mange forskjellige "ord" på 4 bokstaver er det mulig å lage når vi kan bruke samme bokstav flere ganger? På første bokstaven har vi 29 valg. Siden vi kan bruke samme bokstav på nytt har vi også 29 valg på andre bokstav. Det samme gjelder tredje og fjerde bokstav også. Det medfører at vi kan lage

$$29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = 29^4 = 707\,281$$

Vi kunne også her tegnet opp et tre slik som i sted, men med 29 bokstaver så blir treet voldsomt stort så derfor velger vi ikke å gjøre det her. Tankemåten som ligger til grunn for denne situasjonen er akkurat den samme som for enkle sammensetninger.

Dette er et ordnet utvalg da f. eks ordene ella og alle er to forskjellige ord. Det har med andre ord betydning hvilken rekkefølge bokstavene står i.

Ordnet utvalg uten tilbakelegging

Vi tar først utgangspunkt i samme situasjon som i sted. Vi skal se på hvor mange "ord" på fire bokstaver som vi kan lage, men denne gangen forutsetter vi at vi kun skal bruke hver bokstav en gang. Vi har derfor en situasjon der vi har et ordnet utvalg uten tilbakelegging. På første bokstav har vi 29 valg også her. Siden vi har brukt opp en bokstav har vi bare 28 tilgjengelige bokstaver for den andre bokstaven. For den tredje og fjerde bokstaven har vi henholdsvis 27 og 26 valg. Antall kombinasjoner blir derfor

$$29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 570\,024$$

Også her har vi et ordnet utvalg da f. eks ordene sier og rise er to forskjellige ord som inneholder de samme bokstavene.

Et annet eksempel på ordnet utvalg uten tilbakelegging kan være antall måter Norge kan sette sammen stafettlaget sitt på når vi vet hvilke 4 løpere som skal gå. Vi har da 4 valg på første etappen, 3 valg på andre etappen, 2 valg på tredje etappen og 1 valg på siste etappen. Det gir til sammen

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

måter å sette sammen stafettlaget på. Vi merker oss også her at tankemåten som ligger til grunn er den samme som for enkle sammensetninger.

Uordet utvalg uten tilbakelegging

Vi skal i dette avsnittet se på et uordnet utvalg uten tilbakelegging. Dette er den mest krevende situasjonen vi skal se på innen kombinatorikken. Lotto er et godt eksempel på en situasjon der vi har et uordnet utvalg uten tilbakelegging. Før vi går løs på Lottotrekningen skal vi se på en forenklet lotto, da dette er enklere å eksemplifisere.

<u>Forenkelt lotto</u>

Vi skal her se på en forenklet lottovariant. I stedet for å bruke 34 kuler som vi gjør i virkelig lotto, så skal vi har bruke 5 kuler. Vi skal trekke ut 2 av kulene og se på hvor mange måter det kan gjøres på. Dette er eksempel på det vi kaller et uordnet utvalg uten tilbakelegging. Det er uordnet fordi rekkefølgen som kulene trekkes ut i er uten betydning. Det er uten tilbakelegging fordi vi ikke kan bruke samme kule flere ganger. Vi nummererer kulene fra 1 til 5. Vi kan her enkelt telle opp antall kombinasjoner.

12	23	34	45
13	24	35	
14	25		
15			

Og vi ser at vi har 10 forskjellige lottorekker når vi trekker ut to kuler av fem. La oss nå regne ut hvor mange <u>ordnede</u> utvalg vi kan lage. Vi kan regne oss frem til dette ved å regne ut $5 \cdot 4 = 20$ (Vi har 5 valg på første kule og 4 valg på andre kule). Skriver vi opp disse kombinasjonene får vi:

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

La oss gruppere kombinasjonene der vi samler de som inneholder de samme kulene

1 2 2 1	1 3 3 1	1 4 4 1	1 5 5 1	2 3 3 2
2 4 4 2	2 5 5 2	3 4 4 3	3 5 5 3	4 5 5 4

Vi ser her at dersom rekkefølgen <u>ikke</u> er viktig har vi 10 kombinasjoner. Vi ser også at for hvert uordnet utvalg har vi to ordnede utvalg. Rent matematisk kan vi skrive dette slik

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Vi kunne også ha skrevet dette som

$$\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Den siste skrivemåten tar vi med fordi vi skal se at vi etter hvert får et mønster vi kan dra nytte av.

Vi skal nå se på en annen forenklet lottovariant. Vi skal fremdeles bruke 5 kuler, men denne gangen skal vi trekke ut 3 av kulene og se på hvor mange måter det kan gjøres på. Hvis vi nå tenker oss at vi skal ha et <u>ordnet</u> utvalg så kan vi lage $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ kombinasjoner. Dette fordi vi har 5 alternativer på første kule, 4 alternativer på andre kule og til slutt 3 alternativer på tredje kulen. I tabellen under er disse 60 kombinasjonene listet opp.

1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1	1 2 4 1 4 2 2 1 4 2 4 1 4 1 2 4 2 1	1 2 5 1 5 2 2 1 5 2 5 1 5 1 2 5 2 1	1 3 4 1 4 3 3 1 4 3 4 1 4 1 3 4 3 1	1 3 5 1 5 3 3 1 5 3 5 1 5 1 3 5 3 1
1 4 5 1 5 4 4 1 5 4 5 1 5 1 4 5 4 1	2 3 4 2 4 3 3 2 4 3 4 2 4 2 3 4 3 2	2 3 5 2 5 3 3 2 5 3 5 2 5 2 3 5 3 2	2 4 5 2 5 4 4 2 5 4 5 2 5 2 4 5 4 2	3 4 5 3 5 4 4 3 5 4 5 3 5 3 4 5 4 3

Spørsmålet er hvor mange uordnede utvalg vi kan lage. Vi ser ut i fra tabellen at for hvert uordnet utvalg så finnes det 6 ordnede utvalg. Antall uordnede utvalg må derfor bli

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$$

Vi kunne også ha skrevet dette som

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

<u>Lotto</u>

Vi skal nå se på vanlig lotto. Vi følger samme tankegang som over, men vi får nå for mange kombinasjoner til at vi kan skrive de opp. Antall ordnede utvalg blir

$$34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 = 27113264640$$

Hvis vi tenker oss at f. eks kulene 1, 5, 7, 9, 12, 14, 26 er trukket ut, hvor mange ordende utvalg kan vi lage av disse 7 kulene? Jo, for den første kulen har vi 7 valg, for den andre har vi 6 valg, den tredje har vi 5 valg og videre nedover. Antall ordnede utvalg vi kan lage av disse 7 kulene blir derfor $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. Med andre ord, for hvert uordnet utvalg har vi 5040 ordnede utvalg.

Antall lottokombinasjoner blir derfor

$$\frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5\,379\,616$$

Denne fremgangsmåten vil alltid fungere når vi skal regne ut antall kombinasjoner i et uordnet utvalg uten tilbakelegging. Det finnes noen forenklede skrivemåter og beregningsmåter som det kan være greit å kjenne til.

Først skal vi introdusere begrepet fakultet. Det skrives som et tall med utropstegn bak og betyr følgende

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Denne funksjonen finnes på de fleste kalkulatorer. Ved å justere litt på uttrykket over antall lottokombinasjoner kan vi skrive det som fakultet.

$$\frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}$$

Det vi har gjort her er å gange med $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ over og under brøkstreken. Dette gjør vi for at vi skal kunne skrive uttrykket enklere ved å bruke fakultetsfunksjonen.

Hvis vi ser på uttrykket over kan vi nå skrive det som

$$\frac{34!}{27! \cdot 7!} = 5\,379\,616$$

Dette uttrykket skrives gjerne på en spesiell måte i matematikken og det er

$\binom{34}{7}$ og det leses som ”34 over 7”. Altså

$$\binom{34}{7} = \frac{34!}{27! \cdot 7!} = 5\,379\,616$$

På de fleste kalkulatorer så er det en funksjon som regner ut slike uttrykk direkte. Den funksjonen har som oftest symbolet nCr. Skal vi regne ut antall lottokombinasjoner så kan vi skrive inn 34 nCr 7 og få ut svaret.

Andre situasjoner med uordnet utvalg uten tilbakelegging

Det finnes en rekke situasjoner der vi har et uordnet utvalg uten tilbakelegging. Har vi mistanke om at vi har en slik situasjon kan det lønne seg å spørre seg selv om dette er samme situasjon som lottotrekningen. La oss se på et eksempel. Vi tenker oss at vi har en skoleklasse med 26 elever som er på tur. Vi tenker oss at 5 av elevene skal få være med på en båttur for å trekke opp et fiskegarn. Hvor mange forskjellige kombinasjoner er det mulig å trekke ut? Her har vi åpenbart en situasjon uten tilbakelegging. Vi kan jo bare trekke ut hver elev en gang. Dette er også et uordnet utvalg. Om en enkelt elev blir trukket ut som nummer 1, 2, 3, 4 eller 5 er likegyldig, da alle de uttrukne elevene får være med på båtturen. Med andre ord har vi et uordnet utvalg uten tilbakelegging. Situasjonen er den samme som lottotrekningen og antall kombinasjoner blir

$$\binom{26}{5} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 65780$$

HYPERGEOMETRISK SANNSYNLGHETSMODELL

Når vi har forstått prinsippet og tankemåten med uordnet utvalg uten tilbakelegging er det forholdsvis greit å få taket på det som ligger i en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell. La oss se på en problemstilling som er hypergeometrisk. Vi tenker oss at vi har en skoleklasse med 26 elever og der 14 er jenter og 12 er gutter. Vi skal trekke ut 5 elever til å være med i en komité. Hva er sannsynligheten for å trekke ut 3 gutter og 2 jenter?

Vi tar her utgangspunkt i at sannsynligheten er antall gunstige delt på antall mulige.

$$P = \frac{Antall\ gunstige}{Antall\ mulige}$$

Antall mulige kombinasjoner vi kan trekke ut 5 elever av 26 på er som vi har sett i foregående eksempel

$$\binom{26}{5} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 65780$$

Da gjenstår det å finne hvor mange kombinasjoner vi har med 3 gutter og 2 jenter. Vi ser først på hvor mange måter vi kan plukke ut 3 gutter av 14 gutter på og det er $\binom{14}{3} = 364$. Antall måter vi kan plukke ut 2 jenter av 12 på er tilsvarende $\binom{12}{2} = 66$. Antall kombinasjoner med 3 gutter og 2 jenter blir da

$$\binom{14}{3} \cdot \binom{12}{2} = 364 \cdot 66 = 24024$$

Vi har ganget sammen antall gutte og jente kombinasjoner. Vi ser litt nærmere på hvorfor vi kan gjøre det.

Vi kunne ramset opp alle gutte og jentekombinasjonene. Vi skal ikke gjøre det men vi tar likevel med noen av dem

G1G2G3	J1J2
G1G2G4	J1J3
G1G2G5	J1J4
G1G2G6	J1J5
G1G2G7	.
.	.
.	.
.	.
.	J11J12
G12G13G14	
364 gutte kombinasjon	66 jente kombinasjoner

Alle disse kombinasjonene kan kombineres med hverandre

G1G2G3	J1J2
G1G2G4	J1J3
G1G2G5	J1J4
G1G2G6	J1J5
G1G2G7	.
.	.
.	.
.	.
.	J11J12.
G12G13G14	

Vi ser her at hver eneste en av guttekombinasjonene kan kombineres med hver og en av de 66 jentekombinasjonene. Siden vi har 364 guttekombinasjoner får til sammen

$$364 \cdot 66 = 24024$$

kombinasjoner med 3 gutter og 2 jenter.

Sannsynligheten for å trekke ut 3 gutter og 2 jenter blir derfor

$$P = \frac{\binom{14}{3} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{26}{5}} = \frac{364 \cdot 66}{65780} = \frac{24024}{65780} = 0{,}3652$$

Vi tar et par eksempler til fra samme problemstilling. Først ser vi på sjansen for å trekke ut to gutter og tre jenter. Vi tegner ikke på treet denne gang, men setter direkte inn i tilsvarende formel som vi brukte i sted.

$$P = \frac{\binom{14}{2} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{26}{5}} = \frac{91 \cdot 220}{65780} = \frac{20020}{65780} = 0{,}3043$$

Vi ser til slutt på en situasjon der vi skal beregne sannsynligheten for å trekke ut fire gutter og en jente.

$$P = \frac{\binom{14}{4} \cdot \binom{12}{1}}{\binom{26}{5}} = \frac{1001 \cdot 12}{65780} = \frac{12012}{65780} = 0{,}1826$$

Når skal en bruke trestruktur og når skal en bruke hypergeometrisk fordeling

La oss se på følgende oppgave:

Vi tenker oss at vi har 22 kroneis oppi en boks. Av disse er 12 med jordbærsmak og 10 med sjokoladesmak. Vi skal trekke ut 2 is tilfeldig. Hva er sjansen for å trekke ut 2 med sjokoladesmak? Hva er sjansen for å trekke ut to med jordbærsmak? Hva er sjansen for å trekke ut en av hver?

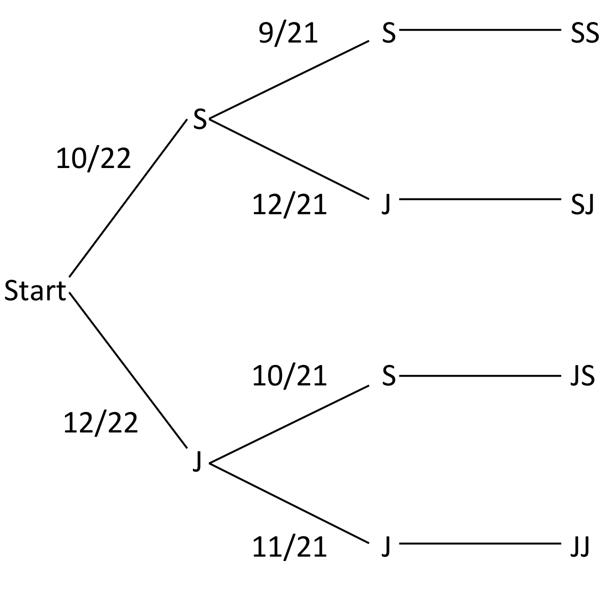
Denne oppgaven kan løses på to måter. Vi kan bruke hypergeometriske fordelingen og regne ut svarene slik:

$$P(SS) = \frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{12}{0}}{\binom{22}{2}} = \frac{45\cdot 1}{231} = \frac{45}{231} = 0{,}1948$$

$$P(JJ) = \frac{\binom{10}{0}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{22}{2}} = \frac{1\cdot 66}{231} = \frac{66}{231} = 0{,}2857$$

$$P(SJ) = \frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{12}{1}}{\binom{22}{2}} = \frac{10\cdot 12}{231} = \frac{120}{231} = 0{,}5195$$

Vi kan alternativt bruke en trestruktur. Vi kan da sette opp



$$\frac{10}{22}\cdot\frac{9}{21} = \frac{90}{462} = \frac{45}{231}$$

$$\frac{10}{22}\cdot\frac{12}{21} = \frac{120}{462} = \frac{60}{231}$$

$$\frac{12}{22}\cdot\frac{10}{21} = \frac{120}{462} = \frac{60}{231}$$

$$\frac{12}{22}\cdot\frac{11}{21} = \frac{132}{462} = \frac{66}{231}$$

Vi ser at av trestrukturen at vi får de samme svarene som ved den hypergeometriske fordelingen.

$$P(SS) = \frac{45}{231}$$

$$P(JJ) = \frac{66}{231}$$

$$P(SJ) = \frac{60}{231} + \frac{60}{231} = \frac{120}{231}$$

Merk. Det har ingenting å si om vi først trekker ut sjokolade og deretter jordbær eller motsatt. For å finne sannsynligheten for en av hver må vi legge sammen sannsynligheten for grenen med SJ og JS.

Vi ser at ved forsøk med to trinn så kan vi bruke begge måtene og det er i grunnen smak og behag hva en velger. Hvis vi f. eks skal trekke ut 4 is og vi lurer på hva sjansen er for 2 med jordbærsmak og to med sjokoladesmak blir saken en annen. Vi kan i prinsippet bruke trestruktur her også, men det blir et veldig stort tre og mye arbeid med å lage det. Da vil den hypergeometriske fordelingen være betraktelig enklere å bruke. Løsningen ved å bruke hypergeometrisk fordeling blir da

$$P(SSJJ) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{22}{4}} = \frac{45 \cdot 66}{7315} = \frac{2970}{7315} = 0{,}4060$$

Så konklusjonen blir at ved situasjoner der en skal trekke ut to stykker av noe, er det smak og behag hva en velger, men er det en trekning der en trekker ut 3 eller flere av noe, bør en bruke den hypergeometriske fordelingen.

BINOMSIK SANNSYNLIGHETSMODELL

I den hypergeometriske modellen så vi at resultatene fra første trekning påvirker de mulige utfallene av andre trekning. Det finnes imidlertid en del situasjoner der utfallene er uavhengig av hverandre. Den mest klassiske situasjonen er kast av terning. Vi tenker oss at vi kaster en terning 5 ganger. Her er det åpenbart at resultatet fra første kast ikke har noen betydning for resultatet av andre kastet og heller ikke de neste kastene. I en slik situasjon kan vi ikke bruke den hypergeometriske modellen. Vi kan i prinsippet bruke en trestruktur men det med kast av mer enn to terninger blir det store og uoversiktlige trær. Vi har derfor behov for å se på en annen metode for å løse denne type problemer.

Vi tenker oss at vi kaster en terning 5 ganger og vi er interessert i å finne sannsynligheten for å få 5 seksere, 4 seksere, 3 seksere, 2 seksere, 1 sekser og 0 seksere. Sjansen for å få seks på et enkelt kast er $\frac{1}{6}$. Sjansen for å få seks på alle fem kastene blir

$$P(5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7776}$$

Vi går over til å se på situasjonen der vi skal ha 4 seksere og et kast som ender med noe annet. Vi tenker oss først at vi får 6 på de fire første kastene og noe annet på det siste.

1 . kast	2. kast	3. kast	4. kast	5. kast
6	6	6	6	A

Sjansen for at dette skal inntre er

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{7776}$$

Men vi kan likegodt få noe annet på et av de andre kastene. Det trenger ikke være på det siste kastet. Vi kan liste opp mulighetene slik jeg har gjort under

Kastnr	1.	2.	3.	4.	5.	Sannsynlighet
Utfall	6	6	6	6	A	$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{7776}$
	6	6	6	A	6	$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{7776}$
	6	6	A	6	6	$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{7776}$
	6	A	6	6	6	$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{7776}$
	A	6	6	6	6	$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{7776}$

Sjansen for hvert av disse utfallene ser vi er like. Vi kan derfor skrive den samlede sannsynligheten for å få akkurat fire sekser som

$$P(4) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{7776}$$

Vi tar videre for oss situasjonen der vi skal beregne sjansen for å få akkurat 2 seksere. Det betyr at to av kastene skal ende opp med noe annet. La oss først se på situasjonen der de to første kastene ender med en sekser.

1 . kast	2. kast	3. kast	4. kast	5. kast
6	6	A	A	A

Sjansen for at dette skal inntre er

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{7776}$$

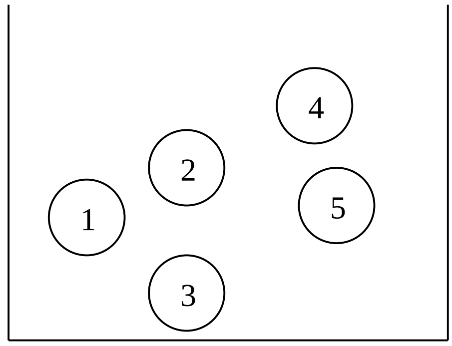
Men vi kan jo også få seks på andre kast enn de to første. I oversikten under er alle mulighetene listet opp.

Kastnr	1.	2.	3.	4.	5.
Utfall	6	6	A	A	A
	6	A	6	A	A
	6	A	A	6	A
	6	A	A	A	6
	A	6	6	A	A
	A	6	A	6	A
	A	6	A	A	6
	A	A	6	6	A
	A	A	6	A	6
	A	A	A	6	6

Vi ser her at vi har 10 forskjellige utfall som alle gir seks på to kast og noe annet på tre kast. Sannsynligheten for hvert av disse utfallene er den samme og vi kan derfor si at sannsynligheten for å få seks på akkurat to kast er

$$P(2) = 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1250}{7776}$$

Vi ser at i situasjonen over kan vi tegne opp de ti utfallene og på den måten finne ut hvor mange like utfall vi har. Med litt større tall blir dette vanskelig. Hvis vi f. eks kaster terningen 10 ganger og skal se på sjansen for å få 5 seksere blir det svært mange kombinasjoner og tegne opp. (Vi kan vise at det gir 252 kombinasjoner). Vi er derfor på jakt etter en enklere måte å beregne antall kombinasjoner på. Det viser seg at antall kombinasjoner i tilfelle over kan beregnes ved å regne ut $\binom{5}{2}$. Det er kanskje ikke helt lett å se hvorfor det gir antall kombinasjoner. La oss prøve å argumentere for det. Vi ser på et tilfelle der vi legger 5 kuler oppi en eske og der vi skal trekke ut to av dem. (uten tilbakelegging og uordnet utvalg)



Dette er jo helt tilsvarende situasjon som lottotrekningen og vi vet da at det kan gjøres på $\binom{5}{2} = 10$ måter. Utfallene vi kan få er

12	23	34	45
13	24	35	
14	25		
15			

Vi ser her at disse kombinasjonene svarer til hvilke terninger vi har fått seks på i oversikten over utfall på forrige side.

Vi kan utnytte dette til å regne ut sjansen for akkurat tre, fire og fem seksere.

$$P(3) = \binom{5}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{250}{7776}$$

$$P(4) = \binom{5}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{7776}$$

$$P(5) = \binom{5}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7776}$$

Vi kunne også skrevet f. eks $P(3)$ litt mer elegant

$$P(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{7776}$$

Eksempel

Vi tar et eksempel til der vi benytter biomisk sannsynlighetsmodell.

Vi skal plante 6 frø i en blomsterpotte. På pakken står det at det er 70% sjanse for at hvert enkelt frø skal spire. Vi skal se på sannsynligheten for at alle frøene spirer, 2 av frøene spirer og at 3 av frøene spirer. Situasjonen er egentlig ganske lik den med terningene. Om et frø spirer har ingen betydning for sjansen for at annet spirer. (Forutsatt at vi planter de på forskriftsmessig måte)

$$P(alle\ spirer) = 0{,}7^6 = 0{,}1176$$

$$P(2\ spirer) = \binom{6}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^4 = 0{,}0595$$

$$P(3\ spirer) = \binom{6}{3} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}1852$$