Oppgaver i sannsynlighetsregning 1

Oppgave 1

Forklar hva som menes med en uniform sannsynlighetsmodell. Gi minst et eksempel på en uniform sannsynlighetsmodell. Begrunn hvorfor den er uniform. Gi også et eksempel på en modell som ikke er uniform. Begrunn hvorfor den ikke er uniform. Prøv å finne andre eksempler enn det som jeg har brukt i timen.

Oppgave 2

En person synes småsure kjempesmukker som finnes i godtehyllen på Meny er veldig gode. De finnes i fargene gul og grønn. En dag personen handler smukker er det 6 grønne og 8 gule smukker i godteposen. Vi tenker oss først at personen trekker ut en smukk.

a) Hva er sannsynligheten for at han trekker ut en gul smukk? Hva er sannsynligheten for at han trekker ut en grønn smukk.

b) Hvilken sannsynlighetsmodell er dette. Grunngi.

c) Personen skal nå trekke ut to smukker. Hva er sannsynligheten for at han trekker ut

- To gule smukker
- To grønne smukker
- En av hver farge

Oppgave 3

Norsk Tipping sier at sjansen for å vinne på et tilfeldig flaxlodd er $\frac{1}{5}$.

a) Dersom du kjøper to flaxlodd, hva er sjansen for at du vinner på begge loddene?

b) Hva er sjansen for at du vinner på minst et av loddene?

c) La oss nå anta at du kjøper 4 lodd. Hva er sjansen for at du vinner på akkurat et av loddene?

Oppgave 4

I sikkerhetskontrollen ved norske flyplasser blir 10% av de reisende plukket ut til en ekstra sikkerhetssjekk. Utvelgelsen av hvem som blir plukket ut til ekstra sjekk skjer helt tilfeldig.

a) Du og din ektefelle skal på ferietur sammen. Hva er sjansen for at ingen av dere blir plukket ut til ekstra sjekk?

b) Hva er sjansen for at minst en av dere blir plukket ut til ekstra sjekk?

c) Hva er sjansen for at begge to blir plukket ut til ekstra sjekk?

d) I neste måned skal du til sammen reise 6 ganger med fly i Norge. Hva er sannsynligheten for at du blir plukket ut til ekstrasjekk akkurat 1 gang?

Oppgave 5

I en klasse med 10 elever skal tre av dem trekkes ut for å representere klassen i en konkurranse. I klassen er det 4 gutter og 6 jenter.

a) På hvor mange måter kan de tre elevene trekkes ut?

b) Hvor mange kombinasjoner er det med bare jenter?

c) I konkurransen forutsettes det at begge kjønn skal være representert. Hvor mange grupper er det mulig å trekke ut dersom vi forutsetter at det skal være minst en gutt og minst en jente i gruppen?

Oppgave 6

Klasse 10A på Sandfallet skole skal arrangere en avslutningsfest for å markere at de er ferdig med grunnskolen. Til å planlegge festen skal de sette ned en komité bestående av 3 personer. Klassen består av 27 elever der 15 er jenter og 12 er gutter.

a) Hvor mange ulike komiteer er det mulig å lage?

b) Vi tenker oss at komiteen blir plukket ut ved loddtrekning. Hva er sannsynligheten for at komiteen vil bestå av:

i) Bare jenter ii) To jenter og en gutt

Klasse 10B som består av 24 elever synes det er en god ide med avslutningsfest og de blir enig med klasse 10A at de skal lage en felles fest for begge klassene. De blir også enig om å sette ned en felles festkomité bestående av 5 personer.

c) Hvor mange ulike komiteer er det nå mulig å sette sammen når vi forutsetter at det skal være minst 2 elever fra hver klasse i komiteen?

d) Hva er sannsynligheten for at komiteen består av 2 personer fra A klassen og 3 personer fra B klassen dersom utvelgelsen skjer ved loddtrekning, og vi ikke har føringer på hvor mange det skal være fra hver klasse?

Løsningsforslag

Oppgave 1

Det som kjennetegner en uniform sannsynlighetsmodell er sjansen for alle enkeltutfall like stor. Det finnes mange eksempler på uniforme sannsynlighetsmodeller. Et eksempel er terningen og hva sjansen er for de ulike utfallene. Den er uniform siden sjansen for 1, 2, 3, 4, 5 og 6 er like store. Andre eksempler på uniform modell er å trekke ut kuler fra en urne, når vi forutsetter at kulene har lik form og vekt.

I en modell som ikke er uniform vil sjansen for enkeltutfallene ikke være like stor. Hvis vi tenker oss et lykkehjul der alle sektorene er like store så har vi en uniform modell. Hvis vi endrer størrelsen på noen av sektorene slik vil ikke lenger modellen være uniform da det er større sjanse for å treffe en stor sektor enn en liten sektor. Et annet eksempel på en ikke uniform modell er den jukse terningen som jeg brukte i undervisningen. Det var en avlang terning der det var mye større sjanse for at den landet på en av de store sidene i forhold til en av de små sidene.

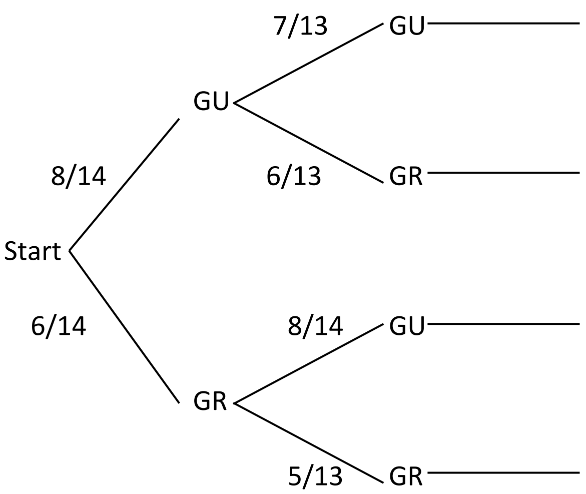
Når vi har en uniform modell kan vi alltid bruke gunstige delt på mulige for å regne ut sannsynligheten.

Oppgave 2

a) $P(\text{Gul smukk}) = \frac{8}{14}$

b) Dette er en uniform modell. Vi forutsetter da at smukkene er helt like, og at det kun er fargen som er forskjellig.

c) Jeg velger her å tegne opp et tre.



$\frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{56}{182}$

$\frac{8}{14} \cdot \frac{6}{13} = \frac{48}{182}$

$\frac{6}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{48}{182}$

$\frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{30}{182}$

$$P(\text{GuGu}) = \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{56}{182} = \frac{28}{91}$$

$$P(\text{GuGr}) = \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{92}{182} = \frac{48}{91}$$

$$P(\text{GrGr}) = \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{30}{182} = \frac{15}{91}$$

Vi kunne her også brukt hypergeometrisk fordeling. Da ville vi fått

$$P(\text{GuGu}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{14}{2}} = \frac{28}{91}$$

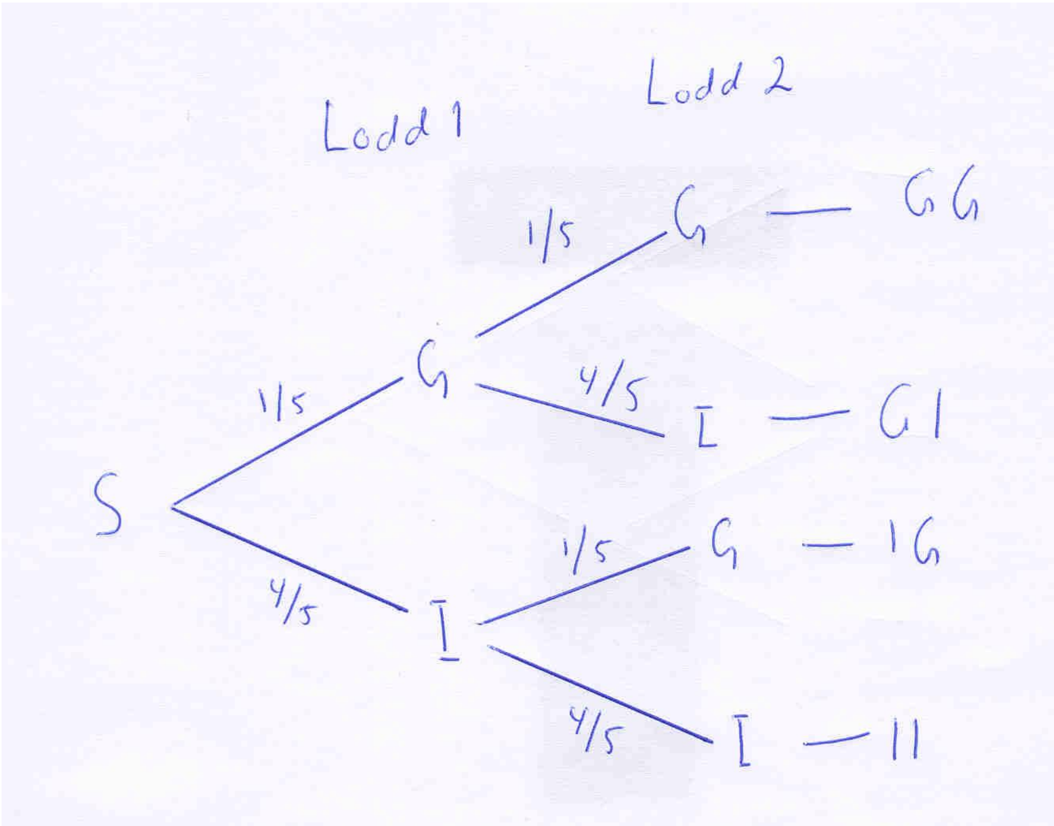
$$P(\text{GuGr}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{48}{91}$$

$$P(\text{GuGu}) = \frac{\binom{8}{0} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{15}{91}$$

Vi ser at vi får det samme svaret.

Oppgave 3

Her kan det være lurt å tegne opp et tre som vist under. Merk at disse to hendelsene er uavhengig av hverandre. Hva som skjer med det første loddet er uten betydning for vinnersjansen for lodd 2.



a) Sjansen for å vinne på begge loddene er

$$P(Begge) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

b) Denne kan løses på flere måter. Det mest elegante er

$$P(Gevinst\ på\ minst\ en) = 1 - P(Ingen) = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{9}{25}$$

Alternativ kan en regne det ut på denne måten

$$P(Minst\ en) = P(GG) + P(GI) + P(IG) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{25}$$

c) Siden vi kjøper 4 lodd blir det veldig tungvint å bruke et tre her. Men vi bruker samme prinsippet som i de foregående spørsmålene. La oss si at vi først vil regne ut sjansen for å vinne på det første loddet men ikke de tre siste.

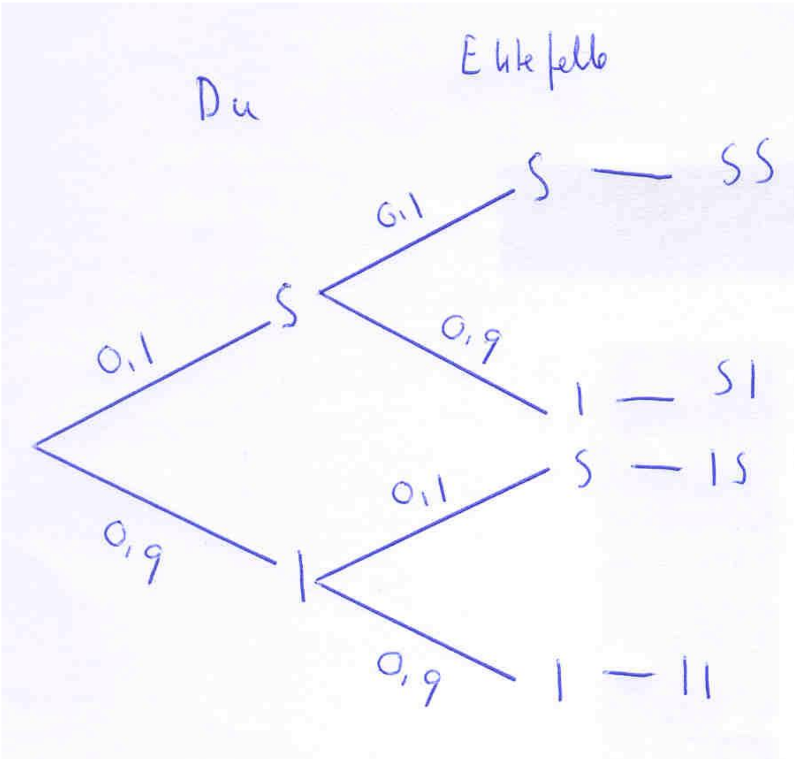
$$P(Vinne\ på\ første\ lodd) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{625}$$

Men vi kan jo like gjerne vinne på andre, tredje eller fjerde loddet. Sannsynligheten for disse vil bli akkurat den samme som å vinne på første loddet. Sjansen for å vinne på akkurat et lodd blir derfor

$$P(Vinne\ på\ et\ lodd) = \frac{64}{625} \cdot 4 = \frac{256}{625} = 0{,}4096$$

Oppgave 4

Her kan det være lurt å tegne opp et tre som vist under. Merk at disse to hendelsene er uavhengig av hverandre. Hva som skjer med deg har ingen betydning for om din ektefelle blir stoppet.



a) Sjansen for at ingen blir plukket ut blir

$$P(Ingen) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$$

b) Denne kan løses på flere måter. Det mest elegante er

$$P(Minst\ en) = 1 - P(Ingen) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}19$$

Alternativ kan en regne det ut på denne måten

$$P(Minst\ en) = P(SS) + P(SI) + P(IS) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}19$$

c) Sjansen for at begge blir plukket ut blir

$$P(Ingen) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$$

d) Siden det er 6 turer blir det veldig tungvint å bruke et tre her. Men vi bruker samme prinsippet som i de foregående spørsmålene. La oss si at vi først vil regne ut sjansen for at en blir stoppet på første turen, men ikke på de neste.

$$P(Sjekk\ kun\ \text{på}\ første\ tur) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}059$$

Men vi kan jo like gjerne bli stoppet på andre, tredje, fjerde, femte eller sjette turen. Sannsynligheten for disse vil bli akkurat den samme som å bli stoppet på første turen. Sjansen for å bli stoppet på akkurat en tur blir derfor

$$P(Sjekk\ kun\ en\ tur) = 0{,}059 \cdot 6 = 0{,}354$$

Oppgave 5

a) Dette er et problem tilsvarende Lottotrekningen. Det løses på tilsvarende måte. Antall kombinasjoner blir

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

b) Antall kombinasjoner blir

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

c) Denne kan løses på to måter. Alternativ 1 er å regne ut hvor mange kombinasjoner som inneholder 1 gutt og 2 jenter og legge dette sammen med antall kombinasjoner med 2 gutter og 1 jente. Det gir

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1} = 60 + 36 = 96$$

Alternativt kan en ta alle mulige kombinasjoner og trekke fra de som kun inneholder jenter og de som kun inneholder gutter

$$\binom{10}{3} - \binom{6}{3} - \binom{4}{3} = 120 - 20 - 4 = 96$$

Oppgave 6

a) Dette er et problem tilsvarende Lottotrekningen. Det løses på tilsvarende måte. Antall kombinasjoner blir

$$\binom{27}{3} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2925$$

b) Her bruker vi gunstige delt på mulige. Det gir oss.

$$P(Bare\ jenter) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{27}{3}} = \frac{455}{2925} = 0{,}155$$

$$P(To\ jenter\ og\ en\ gutt) = \frac{\binom{15}{2} \cdot \binom{12}{1}}{\binom{27}{3}} = \frac{1260}{2925} = 0{,}431$$

c) En må regne ut hvor mange kombinasjoner som inneholder 2 fra A klassen og 3 fra B klassen og legge dette sammen med antall kombinasjoner med 3 fra A klassen og 2 fra B klassen. Det gir

$$\binom{27}{2} \cdot \binom{24}{3} + \binom{27}{3} \cdot \binom{24}{2} = 710\ 424 + 807\ 300 = 1\ 517\ 724$$

d) Her bruker vi gunstige delt på mulige. Det gir oss.

$$P(2\ fra\ A\ og\ 3\ fra\ B) = \frac{\binom{27}{2} \cdot \binom{24}{3}}{\binom{51}{5}} = \frac{710424}{2349060} = 0{,}302$$